Paramagnetismus nach Paul Langevin und gemäß Isings Quantenspinkette

1. Ein (einigermaßen ortsfestes) Teilchen mit dem magnetischen Dipolvektor μn mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Sphäre der Einheitsvektoren) befindet sich in einem (lokal) konstanten Magnetfeld der Flussdichte $B \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Die Energie[1] eines Dipols ist durch die Funktion $H : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ mit $H(n) = -\mu n \cdot B$ gegeben. Hier bezeichnet $n \cdot B$ das Standardskalarprodukt der Vektoren n und B. Der Betrag μ des Dipolvektors μn ist dabei als unveränderlich aufgefasst. Lediglich seine Richtung n kann sich ändern. Das Gibbsmaß Γ_β auf $\mathbb{S}^2$ hat für $\beta \in \mathbb{R}$ bezüglich des Standardflächenmaßes der $\mathbb{S}^2$ die Dichte $\rho_\beta : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\rho_\beta(n) = \frac{e^{-\beta H(n)}}{Z(\beta)}.$$

   (a) Zeigen Sie unter Verwendung sphärischer Koordinaten (θ, φ) mit $\cos\theta = n \cdot B / |B|$ und mit $\varepsilon = \mu |B| > 0$, dass $Z(0) = 4\pi$ und für $\beta \neq 0$

$$Z(\beta) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta e^{\beta\varepsilon\cos\theta} d\theta \right) d\varphi = \frac{4\pi}{\beta\varepsilon} \sinh(\beta\varepsilon).$$

   (b) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der identischen Funktion $\iota d_{\mathbb{S}^2}$ der Sphäre unter Γ_β gilt :

$$\langle \iota d_{\mathbb{S}^2} \rangle_{\Gamma_\beta} = \frac{B}{|B|} \left(\frac{1}{\tanh(\beta\varepsilon)} - \frac{1}{\beta\varepsilon} \right) \text{ für alle } \beta \in \mathbb{R} \setminus 0$$

   und $\langle \iota d_{\mathbb{S}^2} \rangle_{\Gamma_0} = 0$. Welche Magnetisierung hat ein System aus N Dipolen im Gibbszustand der Temperatur T?

   (c) Bestimmen Sie die thermodynamische Fundamentalrelation von N Dipolen in der Temperaturdarstellung. Lösung:

$$F(T, N) = -NkT \ln \left[4\pi \frac{kT}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) \right] \text{ für alle } T \in \mathbb{R} \setminus 0$$

   (d) Welche kalorische Zustandsgleichung haben N Dipole? Ist ihre Wärmekapazität $C(T)$ positiv? Lösung: für alle $T \in \mathbb{R} \setminus 0$ gilt

$$E(T, N) = N \left[kT - \varepsilon \coth\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) \right], \quad C(T, N) = Nk \left[1 - \left(\frac{\frac{\varepsilon}{kT}}{\sinh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)} \right)^2 \right].$$

   (e) Skizzieren Sie die Funktionen $T \mapsto F(T, N), E(T, N), C(T, N)$ bei festem N.

2. Bestimmen Sie für Isings Spinkette den thermischen Erwartungswert der spezifischen Magnetisierung m im thermodynamischen Limes:

$$\langle m \rangle_\beta = \lim_{N \to \infty} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^x e_x + \sigma_i^y e_y + \sigma_i^z e_z}{N} \right\rangle_{\Gamma_{\beta,N}}.$$

   Zeigen Sie, dass die Varianz der Komponenten m^x, m^y, m^z für $N \to \infty$ gegen Null geht.

[1] Stellt man sich den Dipol als starren, elektrisch geladenen, rotierenden Kreisel vor, dessen Schwerpunkt an eine Gleichgewichtslage gebunden ist, dann werden also neben der potentiellen Energie des Schwerpunkts auch die Energien von Dreh- und Schwerpunktsbewegung vernachlässigt.