

Ein erster Einblick in die Hypoplastizität

Wolfgang Fellin, Innsbruck

Erschienen in der Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ), 144. Jg., Heft 11-12/1999, S. 434-436

Zusammenfassung

Ausgehend von der bereits sehr lange bekannten mathematischen Beschreibung des Verformungsverhaltens von Boden im Ödometerversuch, wird ein eindimensionales hypoplastisches Stoffgesetz entwickelt, welches bereits alle wesentlichen Eigenschaften der dreidimensionalen Vollversionen besitzt. Es wird ersichtlich, wie einfach und doch faszinierend gut hypoplastische Stoffgesetze das Bodenverhalten beschreiben.

Abstract

A one-dimensional hypoplastic law is developed starting from the long known mathematical description of the deformation behaviour of soil in the compression test. This one-dimensional hypoplastic law includes all main properties of the three-dimensional version. This shows how simply and nevertheless fascinating well hypoplastic laws describe the soil behaviour.

1 Einleitung

In der modernen Bodenmechanik werden viele Probleme mit Finite-Elemente-Programmen berechnet. Die Verlässlichkeit solcher Berechnungen steht und fällt mit der Qualität der verwendeten Stoffgesetze. Diese Stoffgesetze beschreiben das Verformungsverhalten der Materialien. Sie sind mathematische Formulierungen, die den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen eines Materials bestimmen.

Es gibt viele Stoffgesetze, die das Verformungsverhalten von Böden mehr oder weniger gut beschreiben. Für nichtbindige Böden ist das hypoplastische Stoffgesetz besonders gut geeignet. Es beschreibt den Boden sehr realistisch, nämlich nichtlinear und anelastisch, und ist für den allgemeinen dreidimensionalen

Fall formuliert. Deshalb ist die mathematische Formulierung nicht ganz einfach. Dies schreckt viele potentielle Benutzer und Benutzerinnen vor einer Verwendung dieses Stoffgesetzes ab.

Hier wird eine sehr vereinfachte eindimensionale Version des hypoplastischen Stoffgesetzes vorgestellt. In dieser einfachen Version ist die wesentliche Funktionsweise hypoplastischer Gesetze leicht verständlich.

Wie in der Bodenmechanik üblich, sind Druckspannungen und Stauchungen im folgenden positiv.

2 Ödometerversuch, Kompressionsversuch bei behinderter Seitendehnung

Beim Ödometerversuch wird die zylindrische Bodenprobe in Abbildung 1 bei behinderter Seitendehnung axial gestaucht.

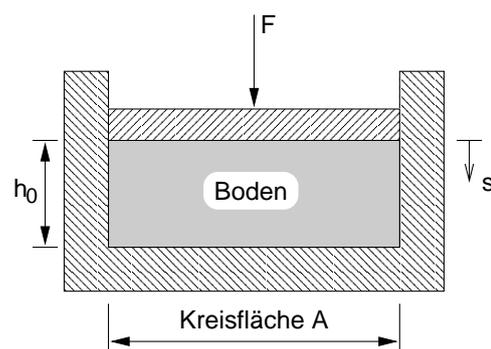


Abbildung 1: Ödometerversuch: schematischer Versuchsaufbau

Der Verlauf der vertikalen Spannung $\sigma = F/A$ über die vertikale Dehnung $\varepsilon = s/h_0$ ist in Abbildung 2 für einen Be- und Entlastungsversuch einer Sandprobe dargestellt.

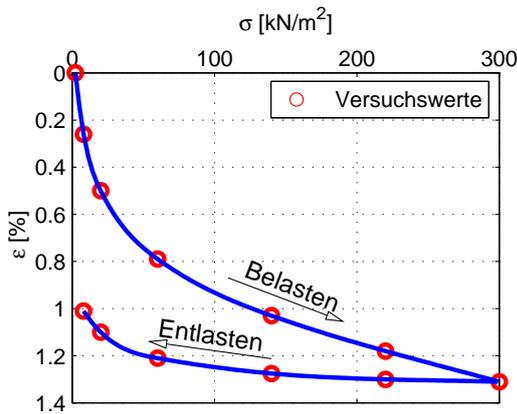


Abbildung 2: Ödometerversuch für lockeren Sand: Spannungs-Dehnungsverlauf

Die Belastungs- und Entlastungskurven sind gekrümmt. Dies bedeutet, daß das Bodenverhalten nicht-linear ist. Bei Entlastung dehnt sich die Bodenprobe nicht mehr ganz aus, der Stempel geht nicht zurück bis zur Ausgangslage. Dieses Materialverhalten wird als anelastisch bezeichnet.

Bereits TERZAGHI schlug vor, dieses Verhalten halb-logarithmisch darzustellen (Abbildung 3). Die Porenzahl in diesem Diagramm läßt sich aus den gemessenen Dehnungen bei bekannter Einbauporenzahl e_0 mit

$$e = e_0 - (1 + e_0)\varepsilon \tag{1}$$

berechnen.

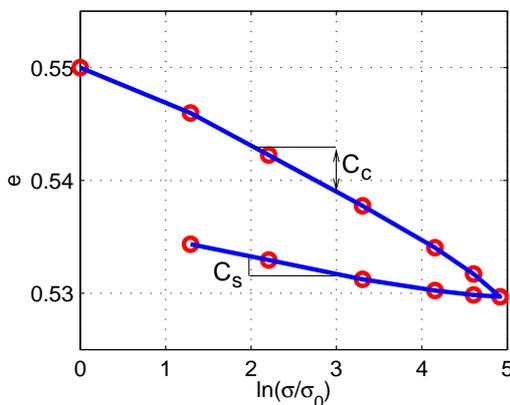


Abbildung 3: Ödometerversuch für lockeren Sand: Spannungs-Porenzahlverlauf (halblogarithmische Darstellung)

Sowohl die Belastung als auch die Entlastung verlaufen in diesem Diagramm beinahe linear. Sie können durch Geraden mit verschiedener Steigung angenähert werden. Die Belastungsgerade hat die Steigung $-C_c$. Der Wert C_c wird Kompressionsbeiwert genannt. Die Entlastungsgerade hat die Steigung $-C_s$, den sogenannten Schwellbeiwert.

Der Porenzahlverlauf für Belastung in einem Ödometerversuch kann damit näherungsweise durch die Gleichung

$$e = e_0 - C_c \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \tag{2}$$

beschrieben werden.

Dieser logarithmische Zusammenhang ist z.B. bereits in [4] beschrieben, und kann auch durch die Differentialgleichung

$$d\sigma = -\frac{\sigma}{C_c} de \tag{3}$$

ausgedrückt werden [2, S.68].

Trennung der Variablen

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{C_c} de$$

und Integrieren auf beiden Seiten

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{C_c} \int_{e_0}^e de$$

führt auf

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{1}{C_c} (e - e_0) .$$

Dies kann leicht auf die gewünschte Gleichung (2) umgeformt werden kann.

Stoffgesetze beschreiben den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Also soll in Gleichung (3) die Porenzahl e durch die Dehnung ε ausgedrückt werden. Differentiation von Gleichung (1) zeigt, daß

$$de = -(1 + e_0)d\varepsilon$$

ist. Damit kann die Porenzahländerung de in Gleichung (3) ersetzt werden

$$d\sigma = \frac{1 + e_0}{C_c} \sigma d\varepsilon . \tag{4}$$

Wird nun obige Gleichung durch dt dividiert¹ und werden die Definitionen $\dot{\sigma} := d\sigma/dt$ und $\dot{\varepsilon} := d\varepsilon/dt$ verwendet, folgt

$$\dot{\sigma} = \frac{1 + e_0}{C_c} \sigma \dot{\varepsilon} . \tag{5}$$

Dies gilt für Belastung, also positives $\dot{\varepsilon}$. Für Entlastung $\dot{\varepsilon} < 0$ ist nach Abbildung 3 die Steigung der Geraden gleich $-C_s$. Dies führt mit denselben Überlegungen wie vorher auf

$$\dot{\sigma} = \frac{1 + e_0}{C_s} \sigma \dot{\varepsilon} . \tag{6}$$

Oft wird auch der Steifemodul im Ödometerversuch und bei der Setzungsberechnung von Fundamenten mit

$$E_s = \frac{1 + e_0}{C_c} \sigma \quad \text{für Belastung} \tag{7}$$

$$E_s = \frac{1 + e_0}{C_s} \sigma \quad \text{für Entlastung}$$

berechnet [2, S.68].

Damit werden Gleichungen (5) und (6) einfach zu

$$\dot{\sigma} = E_s \dot{\varepsilon} , \tag{8}$$

wobei natürlich immer der richtige Steifemodul für Be- und Entlasten gewählt werden muß.

3 Das hypoplastische Stoffgesetz

Gleichungen (5) und (6) lassen sich auch als eine Gleichung schreiben

$$\dot{\sigma} = C_1 \sigma \dot{\varepsilon} + C_2 \sigma |\dot{\varepsilon}| . \tag{9}$$

Die Betragsfunktion bewirkt den Wechsel der Steifigkeit für Be- und Entlasten.

Unter Beachtung der Definition der Betragsfunktion

$$|\dot{\varepsilon}| = \dot{\varepsilon} \quad \text{für } \dot{\varepsilon} > 0$$

$$|\dot{\varepsilon}| = -\dot{\varepsilon} \quad \text{für } \dot{\varepsilon} < 0$$

addieren sich die Konstanten für Belastung ($\dot{\varepsilon} > 0$)

$$\dot{\sigma} = (C_1 + C_2) \sigma \dot{\varepsilon} ,$$

¹Das ist zwar eine mathematisch nicht ganz exakte aber in den Ingenieurwissenschaften übliche Ausdrucksweise.

und subtrahieren sich für Entlastung ($\dot{\varepsilon} < 0$)

$$\dot{\sigma} = (C_1 - C_2) \sigma \dot{\varepsilon} .$$

Es wirken also verschiedene Steifigkeiten: $(C_1 + C_2)\sigma$ für Belastung und $(C_1 - C_2)\sigma$ für Entlastung (vergleiche Gleichung (8)).

Soll nun das hypoplastische Stoffgesetz den Ödometerversuch beschreiben, sind die Konstanten

$$C_1 = \frac{1 + e_0}{2} \frac{C_c + C_s}{C_s C_c}$$

$$C_2 = \frac{1 + e_0}{2} \frac{C_s - C_c}{C_s C_c} .$$

4 Zeitintegration

Das eindimensionale hypoplastische Stoffgesetz (Gleichung (9)) beschreibt die Änderung der Spannung für eine Änderung der Dehnung, oder anders ausgedrückt, die Spannungsrate in Abhängigkeit der Dehnungsrate.

Um nun auf den eigentlich gewünschten Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung zu kommen, muß dieses Stoffgesetz über die Zeit integriert werden. Dies kann bei der sehr einfachen Form der hier präsentierten Stoffgesetzversion analytisch erfolgen. Für die „echten“ hypoplastischen Stoffgesetze funktioniert das aber nur mehr numerisch.

Der in Abbildung 4 dargestellte Vorgang der numerischen Integration wird im folgenden erklärt.

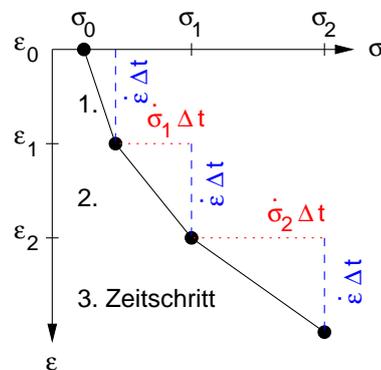


Abbildung 4: Zeitintegration des Stoffgesetzes

Die einfachste Methode, das Stoffgesetz zu integrieren, ist das sogenannte EULER Verfahren, auch Vorwärtsintegration genannt. Dazu wird eine fixe Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ gewählt.² Weiters wird ein Zeitschritt Δt gewählt. Dieser sollte nicht zu groß sein, damit die numerischen Fehler nicht zu groß werden.

Dann wird die Spannungsrate bei der Anfangsspannung σ_0 für die gewählte Dehnungsgeschwindigkeit im ersten Zeitschritt berechnet

$$\dot{\sigma}_0 = C_1 \sigma_0 \dot{\varepsilon} + C_2 \sigma_0 |\dot{\varepsilon}|.$$

Damit wird die Spannung nach dem ersten Zeitschritt berechnet

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \dot{\sigma}_0 \Delta t.$$

Die Dehnung nach dem ersten Zeitschritt ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon} \Delta t.$$

Nun wird die zur Spannung nach dem ersten Zeitschritt gehörende Spannungsrate ermittelt

$$\dot{\sigma}_1 = C_1 \sigma_1 \dot{\varepsilon} + C_2 \sigma_1 |\dot{\varepsilon}|,$$

und die Spannungen und Dehnungen werden auf den Wert nach dem zweiten Zeitschritt gebracht

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 + \dot{\sigma}_1 \Delta t \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon} \Delta t. \end{aligned}$$

Dies läßt sich rekursiv fortsetzen und in Indexschreibweise darstellen:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= C_1 \sigma_i \dot{\varepsilon} + C_2 \sigma_i |\dot{\varepsilon}| \\ \sigma_{i+1} &= \sigma_i + \dot{\sigma}_i \Delta t \\ \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \dot{\varepsilon} \Delta t \end{aligned}$$

Das Ergebnis einer numerischen Zeitintegration des eindimensionalen hypoplastischen Stoffgesetzes nach Gleichung (9) ist in Abbildung 5 im Vergleich zu den Versuchsergebnissen eines Sandes dargestellt. Das eindimensionale hypoplastische Stoffgesetz beschreibt diesen Ödometerversuch sehr gut.

²Die Dehnungsgeschwindigkeit kann frei gewählt werden, da das Stoffgesetz geschwindigkeitsunabhängig ist. Dies trifft für nichtbindige Böden wie Sand in erster Näherung auch zu.

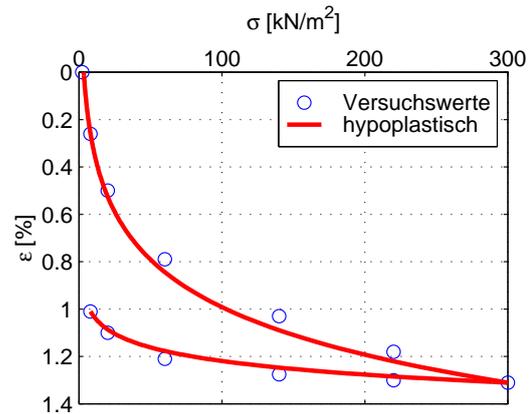


Abbildung 5: Hypoplastisches Stoffgesetz (Gleichung (9)) mit $C_1 = 775$, $C_2 = -433$ ($\sigma_0 = 3,4$ kN/m²)

5 Schreibweisen, Parameter

Das hypoplastische Stoffgesetz wird oft abgekürzt in der Form

$$\dot{\sigma} = h(\sigma, \dot{\varepsilon})$$

angeschrieben. Die verschiedenen Versionen des hypoplastischen Gesetzes unterscheiden sich dann nur in der speziellen Gestalt der Funktion h . Die Funktion h hat gewisse Eigenschaften, welche sich aus den jahrelang gesammelten Erkenntnissen über das Verhalten von kohäsionslosen Böden ergeben.

Die einfache Struktur des hypoplastischen Stoffgesetzes bleibt im wesentlichen auch in der dreidimensionalen Version erhalten, im besonderen die geschlossene Formulierung. Das Stoffgesetz ist deshalb relativ einfach numerisch zu implementieren. Dies ist in Form eines FORTRAN Unterprogrammes bereits am Institut für Geotechnik und Tunnelbau in Innsbruck geschehen, und unter der Homepage <http://geotechnik.uibk.ac.at> zu finden.

Oft ist es für Stoffgesetze, die das Bodenverhalten nichtlinear und anelastisch beschreiben, schwierig bis unmöglich, die darin enthaltenen Parameter zu bestimmen, besonders da deren Anzahl oft sehr groß ist. Hingegen hat eine aktuelle Version des hypoplastischen Stoffgesetzes [5], welches auch den Einfluß der Dichteänderung während der Verformung berücksichtigt,

$$\dot{\sigma} = h(\sigma, \dot{\varepsilon}, e)$$

acht Parameter, von denen zumindest vier auch eine anschauliche physikalische Bedeutung haben. Die acht Stoffparameter für diese Version sind leicht mit Hilfe von einfachen Laborversuchen nach [1] zu bestimmen.

Zur weiteren Vertiefung empfiehlt sich das im Druck befindliche Heft aus der Institutsreihe des Instituts für Geotechnik und Tunnelbau, Universität Innsbruck: D. KOLYMBAS, *Introduction to Hypoplasticity* [3].

Dipl.-Ing. Dr. techn. Wolfgang Fellin
Institut für Geotechnik und Tunnelbau
Universität Innsbruck
Technikerstraße 13
A-6020 Innsbruck

Zusammenfassung

Hypoplastische Stoffgesetze wirken auf den ersten Blick nicht einfach. Das liegt daran, daß sie den nicht-linearen anelastischen Boden realistisch beschreiben und für den drei dimensional Fall formuliert sind. Hier wurde anhand einer stark vereinfachten eindimensionalen Version die wesentliche Funktionalität dieser Stoffgesetze gezeigt. Ein Vergleich mit den Versuchsergebnissen eines Ödometersversuches zeigte, wie gut hypoplastische Stoffgesetze das Verformungsverhalten nichtbindiger Böden beschreiben. Es lohnt sich, diese Klasse von Stoffgesetzen genauer anzuschauen!

Literatur

- [1] I. Herle. Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste. Veröffentlichung des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 142, 1997.
- [2] D. Kolymbas. *Geotechnik – Bodenmechanik und Grundbau*. Springer, August 1998.
- [3] D. Kolymbas. *Introduction to Hypoplasticity*. Number 1 in Advances in Geotechnical Engineering and Tunnelling. A.A. Balkema, 1999.
- [4] K. Terzaghi. *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1925.
- [5] P.-A. von Wolffersdorff. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1:251–271, 1996.