

Es gibt viele Stoffgesetze, die das Verformungsverhalten von Boden mehr oder weniger gut beschreiben. Für nichtbindige Böden ist das hypoplastische Stoffgesetz sehr gut geeignet. Es beschreibt den Boden sehr realistisch, nämlich voll nichtlinear und anelastisch, und ist für den allgemeinen dreidimensionalen Fall formuliert. Deshalb ist die mathematische Formulierung nicht ganz einfach. Dies schreckt viele potentielle Benutzer und Benutzerinnen von einer Verwendung dieses Stoffgesetzes ab.

Hier werden einige grundlegende Ideen des hypoplastischen Stoffgesetzes in einfachen eindimensionalen Beispielen erläutert. Dadurch wird die wesentliche Funktionsweise dieses Gesetzes deutlich.

Hypoplasticity for beginners. *There are a lot of constitutive laws to describe the deformation behaviour of soil. The hypoplastic law is a good choice for cohesionless soils. It describes the behaviour of soil very realistic, i. e. nonlinear and inelastic. It is formulated for the general three-dimensional case. Therefore the equations are not quite simple. This scares many potential users from using the hypoplastic law.*

Some fundamental ideas of the hypoplastic material law are shown with simple one dimensional examples. Thus the major functionality of this law becomes clear.

1 Einleitung, Definitionen

Stoffgesetze beschreiben das Verformungsverhalten von Materialien. Sie sind mathematische Formulierungen, die den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen eines Materials bestimmen.

Hier werden zwei einfache eindimensionale Stoffgesetze entwickelt. Das erste soll das Verhalten einer Bodenprobe im Kompressionsversuch beschreiben. Mit dem zweiten wird der Triaxialversuch simuliert. Beide Stoffgesetze haben die Form des hypoplastischen Stoffgesetzes.

In der Welt der „Stoffgesetzmenschen“ werden die Vorzeichen für Spannung und Dehnung wie in der allgemeinen Mechanik gewählt. Druckspannungen sind also im Gegensatz zu den Gepflogenheiten der Bodenmechanik negativ, wie auch die Stauchungen. Im folgenden wird diese Vorzeichenkonvention verwendet.

2 Einaxialer Kompressionsversuch

Als erstes Beispiel dient das Verhalten einer Bodenprobe im Kompressionsversuch. Die zylindrische Bodenprobe in Bild 1 wird bei behinderter Seitendehnung axial gestaucht.

Der Verlauf der vertikalen Spannung $\sigma = -F/A$ über die vertikale Dehnung $\varepsilon = -s/h_0$ ist in Bild 2 für einen Be- und Entlastungsversuch einer Sandprobe dargestellt.

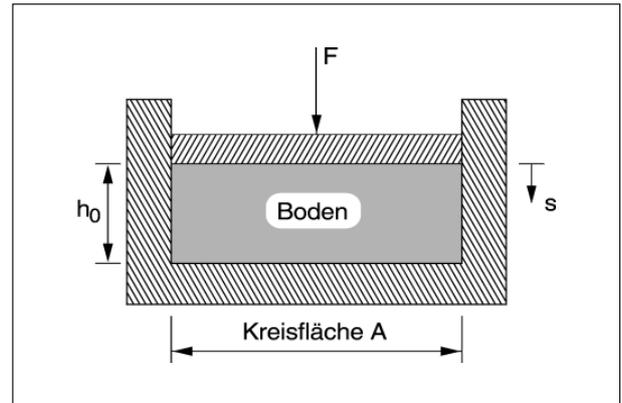


Bild 1. Kompressionsversuch: schematischer Versuchsaufbau

Fig. 1. Confined compression test: schematic experimental setup

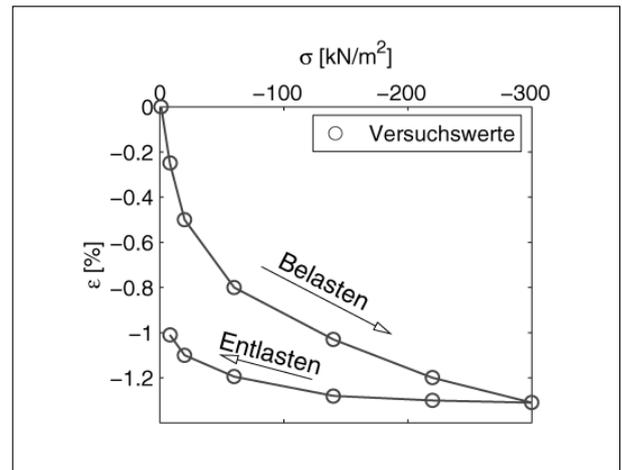


Bild 2. Kompressionsversuch für lockeren Sand: Spannungs-Dehnungsverlauf

Fig. 2. Confined compression test with loose sand: Stress strain relation

Auffällig ist der nichtlineare Verlauf (gekrümmte Kurve) und das anelastische Verhalten (verschiedene Be- und Entlastungskurven). Ziel ist es, eine möglichst einfache mathematische Formulierung zu finden, die aber doch eine gute Approximation an dieses Verhalten darstellt.

2.1 Einfachstes Modell

Als einfachste Beschreibung dieses Verhaltens könnte ein Verlauf aus zwei Geraden (Bild 3) dienen. Dies ist ein lineares anelastisches Stoffgesetz.

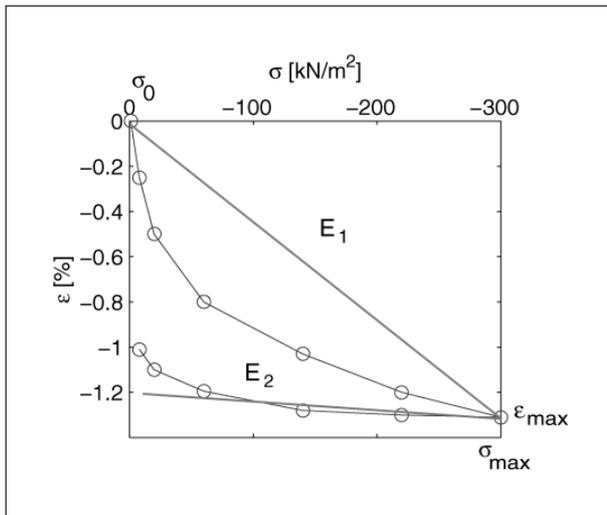


Bild 3. Lineare anelastische Approximation
Fig. 3. Linear inelastic approximation

So ein Verhalten könnte als direkter Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung angegeben werden:

$$\text{Belastung: } \sigma = \sigma_0 + E_1 \varepsilon$$

$$\text{Entlastung: } \sigma = \sigma_{\max} + E_2 (\varepsilon - \varepsilon_{\max})$$

Die maximale Spannung σ_{\max} ist aber üblicherweise nicht bekannt, sondern ergibt sich aus der Belastungsgeschichte. Damit ist die Gleichung für die Entlastung nicht sehr praktisch definiert. Außerdem kann alleine aus dem aktuellen Wert der Dehnung nicht entschieden werden, ob Be- oder Entlasten vorliegt, es muß zusätzlich die Änderung der Dehnung betrachtet werden.

Etwas raffinierter kann so ein Verhalten aber mit einem Ratengesetz beschrieben werden. Dazu wird der Parameter Zeit t eingeführt. Nun wird die Änderung der Spannung $\sigma(t)$ und Dehnung $\varepsilon(t)$ über die Zeit für eine vorgegebene Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}(t)$ betrachtet. Die Größe $\dot{\varepsilon}(t)$ ist die Ableitung der Dehnung nach der Zeit $\dot{\varepsilon}(t) = d\varepsilon(t)/dt$. Für Belastung (Kompression) ist $\dot{\varepsilon} < 0$ und für Entlastung ist $\dot{\varepsilon} > 0$.

Als Ratengesetz kann das anelastische lineare Verhalten in Bild 3 so beschrieben werden:

$$\text{Belastung } \dot{\varepsilon} < 0: \quad \dot{\sigma} = E_1 \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\text{Entlastung } \dot{\varepsilon} > 0: \quad \dot{\sigma} = E_2 \dot{\varepsilon} \quad (2)$$

Das hypoplastische Stoffgesetz ist ein Ratengesetz. Es beschreibt die Änderung der Spannung für eine Änderung der Dehnung.

Um die Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu erhalten, muß so ein Ratengesetz über die Zeit integriert werden.¹⁾

¹⁾ Dies ist übrigens die „berühmte“ Zeitintegration des Stoffgesetzes.

Für Belastung folgt durch Zeitintegration von Gl. (1):

$$\int_0^t \dot{\sigma} dt = \int_0^t E_1 \dot{\varepsilon} dt$$

$$\sigma(t) - \sigma(0) = E_1 \varepsilon(t) - E_1 \varepsilon(0)$$

Mit den Anfangsbedingungen $\varepsilon(0) = 0$ und $\sigma(0) = \sigma_0$ erhält man die gewünschte Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\sigma = \sigma_0 + E_1 \varepsilon .$$

Wird nun zur Zeit t_1 die Belastungsgeschwindigkeit umgedreht, folgt der weitere Spannungs-Dehnungsverlauf für die Entlastung aus der Integration von Gl. (2) mit den Anfangsbedingungen $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_{\max}$ und $\sigma(t_1) = \sigma_{\max}$ zu

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_2 (\varepsilon - \varepsilon_{\max}) .$$

Gl. (1) und (2) können auch zu einer Gleichung zusammengefaßt werden:

$$\dot{\sigma} = \frac{E_1 + E_2}{2} \dot{\varepsilon} + \frac{E_2 - E_1}{2} |\dot{\varepsilon}| \quad (3)$$

Durch die Betragsfunktion wechselt die Steifigkeit für Be- und Entlastung.

Das anelastische Verhalten des hypoplastischen Stoffgesetzes wird durch die Verwendung der Betragsfunktion erreicht.

2.2 Verbessertes Modell

Nachdem der gerade Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehung eher unbefriedigend ist, wird nun versucht, einen gekrümmten Verlauf zu erreichen. In der Bodenmechanik wird die Steifigkeit des Bodens im Kompressionsversuch oft proportional zur Spannung angenommen. Um dies zu erreichen, werden die rechte Seite der Gl. (3) mit der Spannung multipliziert und zwei noch zu bestimmende Konstanten eingeführt:

$$\dot{\sigma} = C_1 \sigma \dot{\varepsilon} + C_2 \sigma |\dot{\varepsilon}| \quad (4)$$

Die Zeitintegration für die Belastung führt auf

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = (C_1 - C_2) (\varepsilon - \varepsilon_0) ,$$

den bekannten logarithmischen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung im Kompressionsversuch. Für Be- und Entlastung sind die gewonnenen Kurven in Bild 4 dargestellt.

2.3 Vergleich mit der „herkömmlichen“ Bodenmechanik

Die axiale Kompression (Belastung) bei behinderter Seitendehnung wird näherungsweise durch

$$d\sigma = -C_c^{-1} \sigma d\varepsilon$$

beschrieben. Darin ist C_c der Kompressionsbeiwert.

Die jeweilige Porenzahl e im Kompressionsversuch kann durch die Ausgangsporenzahl und die

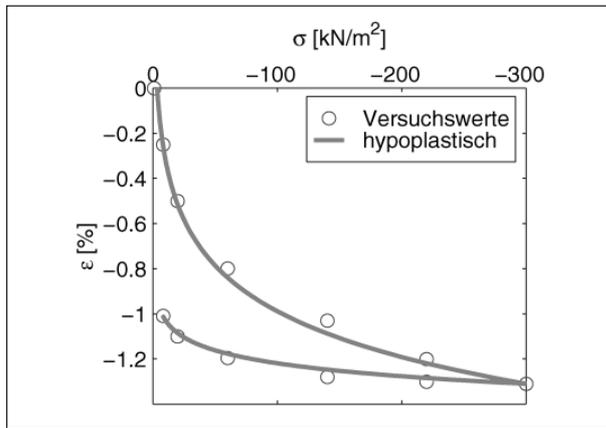


Bild 4. Hypoplastische Approximation mit Gl. 4, $C_1 = -775$, $C_2 = -433$
 Fig. 4. Hypoplastic approximation with equation 4, $C_1 = -775$, $C_2 = -433$

Dehnung beschrieben werden: $e = e_0 + (1 + e_0) \epsilon$.
 Damit ist $de = (1 + e_0) d\epsilon$ und

$$d\sigma = - \frac{(1 + e_0)}{C_c} \sigma d\epsilon .$$

Für $\dot{\epsilon} < 0$ ist Gl. (4)

$$\dot{\sigma} = (C_1 - C_2) \sigma \dot{\epsilon}$$

Durch Vergleich der beiden obigen Gleichungen wird ersichtlich, daß

$$- \frac{(1 + e_0)}{C_c} = C_1 - C_2 \tag{5}$$

ist. Für Entlastung gilt Zusammenhang

$$- \frac{(1 + e_0)}{C_s} = C_1 + C_2$$

mit dem Schwellbeiwert C_s .

Gl. (4) entspricht also genau den herkömmlichen Vorstellungen des Bodenverhaltens im Kompressionsversuch, und die Konstanten für das ein-dimensionale hypoplastische Stoffgesetz sind bestimmbar:

$$C_1 = - \frac{1 + e_0}{2} \frac{C_s + C_c}{C_s C_c}$$

$$C_2 = - \frac{1 + e_0}{2} \frac{C_c - C_s}{C_s C_c}$$

Die Steifigkeit des Bodens für die Belastung im Kompressionsversuch wird in der herkömmlichen Bodenmechanik näherungsweise proportional zur Spannung angesetzt

$$E_s = -(1 + e_0)/C_c \sigma .$$

Für Belastung ist laut Gl. (5) $E_s = (C_1 - C_2) \sigma$. Daraus wird ersichtlich, daß die Faktoren $C_1 \sigma$ und $C_2 \sigma$ in Gl. (4) Steifigkeiten entsprechen.²⁾

²⁾ Achtung: C_1 und C_2 sind zwar negativ, aber auch die Spannung σ ist negativ, damit werden die Steifigkeiten wieder positiv.

Bemerkung: Dies kann auch mathematisch gezeigt werden. Die Tangentensteifigkeit ist definiert als $d\sigma/d\epsilon$. Die Spannung σ ist nun als Funktion der Zeit gegeben. Anwenden der Kettenregel zeigt:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d\sigma}{dt} \frac{dt}{d\epsilon} = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{d\epsilon}{dt}} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \tag{6}$$

So ist z. B. die Steifigkeit für die Belastung im Kompressionsversuch aus Gl. (4)

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} = (C_1 - C_2) \sigma .$$

Daß die Spannung in Gl. (4) nur in der ersten Ordnung, also als σ^1 und nicht z. B. als σ^2 vorkommt, bewirkt die Proportionalität der Steifigkeit zur Spannung.

Bemerkung: Mathematisch wird eine Funktion f als homogen erster Ordnung bezeichnet, wenn gilt: $y = f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle λ . Wie leicht ersichtlich, hat auch Gl. (4) diese Eigenschaft für das Argument Spannung. Allgemein bedingt die Forderung nach der Proportionalität der Steifigkeit zur Spannung ein Stoffgesetz, das nur Spannungsterme in der ersten Ordnung beinhaltet, also homogen erster Ordnung in σ ist.

Das nichtlineare Verhalten des hypoplastischen Stoffgesetzes wird durch die der Spannungsabhängigkeit der Steifigkeit gesteuert.

2.4 Geschwindigkeits(un)abhängigkeit

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines Bodens ist in erster Näherung von der Belastungsgeschwindigkeit unabhängig. Dies sollte auch vom Stoffgesetz beschrieben werden.

Welche Eigenschaft ein Ratengesetz deshalb haben soll, ist am leichtesten mit Bild 5 zu erkennen. Hier ist das Ergebnis einer numerischen Zeitintegration für einen Zeitschritt Δt dargestellt.

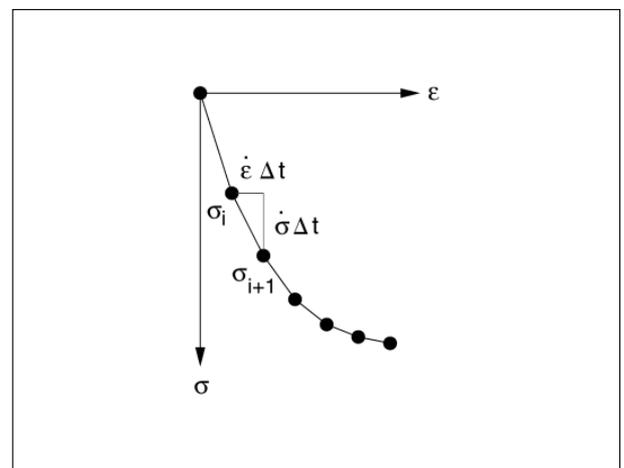


Bild 5. Numerische Zeitintegration des Stoffgesetzes
 Fig. 5. Numerical time integration of the constitutive law

Unabhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit bedeutet, daß die Steigung der Kurve (Steifigkeit) $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}\Delta t}{\dot{\varepsilon}\Delta t}$ nicht von der Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ abhängt. Damit muß für eine doppelte Belastungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ die Spannungsrate $\dot{\sigma}$ genau doppelt so groß sein. Es dürfen daher keine Terme wie z. B. $\dot{\varepsilon}^2$ im Stoffgesetz vorkommen.

Bemerkung: Wechselt aber die Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}$ das Vorzeichen, so soll sich auch die Steifigkeit ändern! Deswegen ist das hypoplastische Stoffgesetz **positiv** homogen erster Ordnung (es gilt $y = f(\lambda x) = \lambda f(x)$ nur für positive λ).

Hypoplastische Stoffgesetze enthalten nur Dehnungsterme erster Ordnung (positiv homogen erster Ordnung in $\dot{\varepsilon}$).

3 Triaxial-Versuch

Beim Triaxialversuch wird eine zylindrische Bodenprobe bei konstanter horizontaler Spannung σ_2 in vertikaler Richtung durch eine Spannung σ_1 zusammengedrückt (Bild 6).

Der qualitative Verlauf der Vertikalspannung σ_1 über die Vertikaldehnung $\varepsilon_1 = s/h_0$ bei einer be-

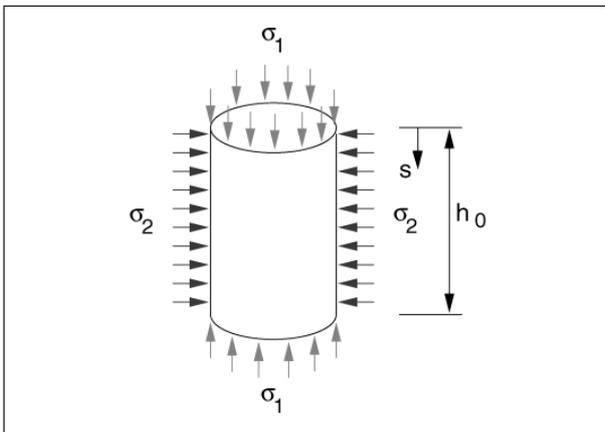


Bild 6. Triaxialversuch schematisch
Fig. 6. Triaxial test schematically

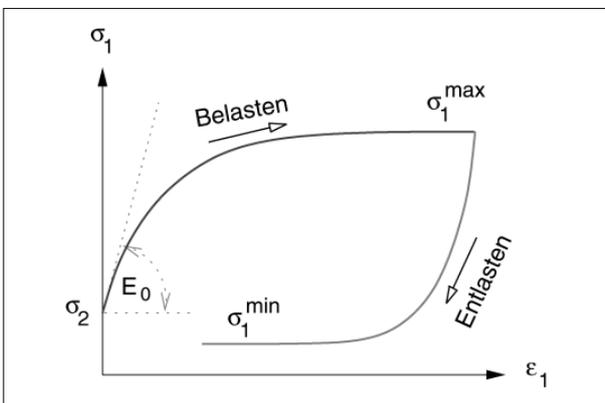


Bild 7. Vertikalspannungsverlauf beim Triaxialversuch
Fig. 7. Vertical stress during triaxial testing

stimmten Horizontalspannung σ_2 ist in Bild 7 dargestellt.

Mit den im vorigen Abschnitt eingeführten wesentlichen Eigenschaften des hypoplastischen Stoffgesetzes wird nun ein einfaches Stoffgesetz für den Spannungs-Dehnungs-Verlauf in einem Triaxialversuch konstruiert.

Das Stoffgesetz soll drei Bedingungen erfüllen:

1. Wechsel der Steifigkeit beim Wechsel zwischen Be- und Entlastung
2. verschwindende Steifigkeit für $\sigma_1 = \sigma_1^{\max}$ bei Belastung und $\sigma_1 = \sigma_1^{\min}$ bei Entlastung
3. Die Anfangssteifigkeit soll den Wert E_0 haben.

Der Wechsel der Steifigkeiten wird mit dem Trick der Betragsfunktion erreicht.

Die maximale und minimale Vertikalspannung ergeben sich nach der *Mohr-Coulombschen* Bruchbedingung für kohäsionslose Böden

$$\sigma_1^{\max} - \sigma_2 = (\sigma_1^{\max} + \sigma_2) \sin \varphi \quad (7)$$

$$\sigma_2 - \sigma_1^{\min} = (\sigma_2 + \sigma_1^{\min}) \sin \varphi \quad (8)$$

mit dem Reibungswinkel φ des Materials. Sowohl die sogenannte Deviatorspannung $\sigma_1 - \sigma_2$ wie auch die Summe der Hauptspannungen $\sigma_1 + \sigma_2$ sind für das Bruchverhalten maßgebend. Also werden die beiden Terme in der Formulierung benutzt:

$$\dot{\sigma}_1 = C_3(\sigma_1 + \sigma_2) \dot{\varepsilon}_1 + C_4(\sigma_1 - \sigma_2) |\dot{\varepsilon}_1| \quad (9)$$

Die erste Bedingung für die Bestimmung der beiden Konstanten C_3 und C_4 ist, daß die Anfangssteifigkeit für Belastung, also für $\sigma_1 = \sigma_2$ und $\dot{\varepsilon} < 0$ gleich E_0 sein soll. Gl. (9) wird für $\dot{\varepsilon} < 0$ zu

$$\dot{\sigma}_1 = [C_3(\sigma_1 + \sigma_2) - C_4(\sigma_1 - \sigma_2)] \dot{\varepsilon}_1 .$$

Aus Gl. (6) ist bekannt, daß der Term in den eckigen Klammern vor $\dot{\varepsilon}_1$ die Steifigkeit ist. Diese soll für $\sigma_1 = \sigma_2$ gleich E_0 sein:

$$C_3 2 \sigma_2 = E_0$$

Daraus folgt

$$C_3 = \frac{E_0}{2 \sigma_2} .$$

Für den Triaxialversuch ist E_0/σ_2 tatsächlich ungefähr eine Konstante (Proportionalität der Steifigkeit zur Spannung!).

Als zweite Bedingung soll Gl. (9) auch das Bruchverhalten simulieren. Dies bedeutet verschwindende Steifigkeit für $\sigma_1 = \sigma_1^{\max}$ bei Belastung, oder anders ausgedrückt, eine verschwindende Spannungsrate $\dot{\sigma}_1 = 0$ bei negativer Dehnungsrate $\dot{\varepsilon} < 0$. Mit dieser Bedingung folgt aus Gl. (9):

$$C_3(\sigma_1^{\max} + \sigma_2) - C_4(\sigma_1^{\max} - \sigma_2) = 0 ,$$

und mit Gl. (7)

$$C_4 = \frac{C_3}{\sin \varphi} = \frac{E_0}{2 \sigma_2 \sin \varphi} .$$

Daß die Bruchbedingung mit dieser Konstanten C_4 auch für Entlastung erfüllt wird, kann leicht nachgerechnet werden.

Durch Terme mit der deviatorischen Spannung können im hypoplastischen Stoffgesetz Bruchbedingungen simuliert werden.

Als Beispiel ist der Spannungs-Dehnungs-Verlauf für $E_0 = 1000 \text{ kN/m}^2$, $\varphi = 30^\circ$ und $\sigma_2 = -100 \text{ kN/m}^2$ in Bild 8 dargestellt.

4 Zusammenfassung

Das hypoplastische Stoffgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen eines kohäsionslosen Bodens als Ratengesetz:

$$\dot{\sigma} = h(\sigma, \dot{\varepsilon})$$

Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen ergeben sich dann durch (numerische) Integration über die Zeit, abhängig von der jeweiligen Belastungsgeschichte.

Aus der Kenntnis über das Verhalten von Sand in Laborversuchen folgen die drei wesentlichen Eigenschaften für die Funktion h :

1. positiv homogen erster Ordnung in $\dot{\varepsilon}$ (Geschwindigkeitsunabhängigkeit)
2. inkrementell nichtlinear in $\dot{\varepsilon}$ (Betragsfunktion)
3. homogen³⁾ in σ (Steifigkeit ist spannungsabhängig)

Durch Terme mit der Deviatorspannung in der Formulierung des Gesetzes können Bruchbedingungen erfüllt werden.

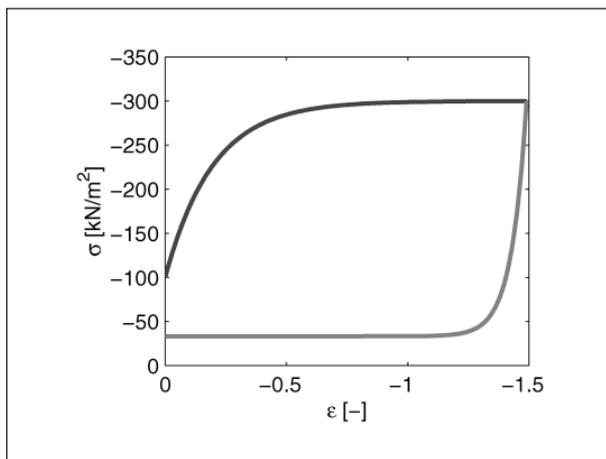


Bild 8. Ergebnis der Simulation eines Triaxial-Versuches mit dem einfachen hypoplastischen Gesetz, Gl. (9)

Fig. 8. Result of a simulation of the triaxial test with the simple hypoplastic law, equation (9)

³⁾ Nur einfache hypoplastische Stoffgesetzversionen sind homogen erster Ordnung in σ . Neuere Versionen sind homogen n-ter Ordnung in σ . Damit kann die Spannungsabhängigkeit der Steifigkeit besser modelliert werden.

5 Weiterführende Literatur

Zur weiteren Vertiefung empfiehlt sich das im Druck befindliche Heft aus der Institutsreihe des Instituts für Geotechnik und Tunnelbau, Universität Innsbruck: *D. Kolymbas*, Introduction to Hypoplasticity, Balkema-Verlag.

6 Numerische Implementierung, Testprogramme

Am FTP-Server des Instituts für Geotechnik und Tunnelbau

`ftp://ftp.uibk.ac.at/pub/uni-innsbruck/igt/sources/` sind verschiedene Programme für das hypoplastische Stoffgesetz zu finden.

Eine Implementierung des hypoplastischen Stoffgesetzes [4] für das Finite-Elemente Programm ABAQUS steht frei zur Verfügung. Diese befindet sich in Form eines Unterprogrammes [3] für benutzerdefinierte Stoffgesetze (user subroutine `umat.f`) unter: `umat_hypo/`

Die Eichung der Parameter für dieses Stoffgesetz ist in [1] beschrieben.

Weiter sind zwei Testprogramme zu finden, die verschiedene Elementversuche (Kompressionsversuch, Triaxversuch, ...) mit dem hypoplastischen Stoffgesetz simulieren. Das Programm Hypotest von *Herle* für DOS und Unix/Linux unter: `herle_hypo/`, sowie die Windows 95, NT-Version von *Doanh, Herle, Bourgeois*: `doanh_hypo/`

Geplante Fortsetzung dieses Beitrages:

- Hypoplastizität für leicht Fortgeschrittene
- Hypoplastizität für Fortgeschrittene
- Hypoplastizität für Anwender

Literatur

- [1] *Herle, I.*: Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste. Veröffentlichung des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 142, 1997.
- [2] *Kolymbas, D.*: Introduction to Hypoplasticity. Advances in Geotechnical Engineering, Nummer 1. A. A. Balkema, 1999.
- [3] *Roddeman, D.*: A hypoplasticity routine for ABAQUS. <http://info.uibk.ac.at/c/c8/c813/res/FEhypo.html>
- [4] *von Wolffersdorff, P.-A.*: A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1:251–271, 1996.

Autor dieses Beitrages:

Dipl.-Ing. Dr. techn. Wolfgang Fellin, Universität Innsbruck, Institut für Geotechnik und Tunnelbau, Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck, Österreich