Mathematische Methoden der Physik I

Gebhard Grübl

Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck

Sommersemester 1998

Inhaltsverzeichnis

0.1 Vorwort 4

1 Geometrie der Vektorräume **5**
1.1 Innere Produkte von Vektorräumen 5
1.2 Invarianzen eines inneren Produktes 12
1.3 Zweidimensionale Drehungen 13
1.4 Drehen von Funktionen 16
1.5 2D Lorentztransformationen 18
1.6 Dreidimensionale Drehungen 21
1.7 Metrisches Volumen 29
1.8 Linearformen auf V 32
1.9 Die adjungierte einer linearen Abbildung 36
1.10 Tensorprodukte 40
1.11 Integralkurven linearer Vektorfelder 44

A Übungsbeispiele **59**

0.1 Vorwort

Der vorliegende Text faßt den Inhalt der dreistündigen Vorlesung "Mathematische Methoden der Physik", wie sie im Sommersemester 98 für Hörer im zweiten Semester abgehalten wurde, etwas verdichtet zusammen. An manchen Stellen geht der Text über den Inhalt der Vorlesung hinaus. Solche Passagen sind mit einem vorangestellten * gekennzeichnet.

Kapitel 1

Geometrie der Vektorräume

Vektorräume sind so etwas wie die Legobausteine der Ideenwelt der Physik. Im Kleinen kann vieles linear approximiert, das heißt unter Verwendung von Vektorräumen, beschrieben werden. Beim Übergang zum Großen entstehen dann durch geschicktes Aneinanderklicken der elementaren Steine komplizierte, krumme Figuren, denen in der Physik nichtlineare Naturgesetze entsprechen. Diese Vorlesung handelt von den inneren Eigenschaften einzelner Legobausteine. Ihr Zusammenklicken wird noch zurückgestellt. Trotzdem eröffnet sich eine reichhaltige, interessante Welt, denn für viele Phänomene ist bereits in Vektorräumen Platz.

1.1 Innere Produkte von Vektorräumen

In diesem Abschnitt wird eine Verallgemeinerung des Skalarproduktes von Vektoren, das innere Produkt, inklusive der daraus abgeleiteten kovarianten Karten eines Vektorraums eingeführt. So können etwa euklidische und minkowskische Vektorraum"struktur" und auch die "Geometrie" der Quantenphysik als Spezialfälle eines einzigen Begriffes verstanden und deshalb in einem Zug behandelt werden.

Aus der Vorlesung "Mathematik für Physiker I" (W97/98) ist bekannt, daß jeder Vektor v eines endlichdimensionalen (reellen oder komplexen) Vektorraumes V bezüglich einer (geordneten) Basis $\underline{e} = (e_1, ..., e_n)$ eine eindeutige Zerlegung in Vielfache der Basiselemente besitzt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i = (e_1, ..., e_n) \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ .. \\ v^n \end{pmatrix}.$$

Dieser Sachverhalt ermöglicht die folgende Definition, in der $M(n, m, K)$ den VR der Matritzen mit n Zeilen und m Spalten mit Einträgen aus K bezeichnet.

Definition 1 *Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Die Abbildung $U_{\underline{e}}: V \to M(n, 1, K)$, die für alle $v \in V$ die Gleichung $v = \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v)$ erfüllt, heißt kontravariante Karte von V zur Basis $\underline{e}$. Die Funktion $U^i_{\underline{e}} := pr^i \circ U_{\underline{e}} : V \to K$ heißt für $1 \leqslant i \leqslant n$ die i-te kontravariante Koordinatenfunktion zur Basis $\underline{e}$. Die Funktion $pr^i : M(n, 1, K) \to K$ bildet eine n-Spalte auf ihren Eintrag in der i-ten Zeile ab. Eine äquivalente Definition von $U_{\underline{e}}: V \to M(n, 1, K)$ ist: $U_{\underline{e}}(\underline{e}) = I$ oder ausführlich:*

$$U^i_{\underline{e}}(e_j) = \delta^i_j := \begin{cases} 1 & für \quad i = j \\ 0 & \quad\quad sonst \end{cases}. \tag{1.1}$$

Satz 1 *Sind $\underline{e}$ und $\underline{f} = \underline{e} \cdot M$ Basen eines K-VR's V, d. h. es gilt: $f_i = \sum_{j=1}^n e_j M^j_i$ mit $M^j_i \in K$, dann folgt $U_{\underline{f}} = M^{-1} \cdot U_{\underline{e}}$ oder mit koordinatenweise ausgeschriebenem Matrixprodukt: $U^i_{\underline{f}} = \sum_{j=1}^n \left(M^{-1}\right)^i_j U^j_{\underline{e}}$.*

Beweis: Für alle $v \in V$ gilt: $v = \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v) = \underline{f} \cdot U_{\underline{f}}(v) = \underline{e} \cdot M \cdot U_{\underline{f}}(v)$. Da $\underline{e}$ eine Basis ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1 *Aus gegebenem Anlaß sei an folgende Tatsachen erinnert (vgl. MPI, Kap. 3.3).*

(i) Die Basiswechselmatrix M stimmt mit der Abbildungsmatrix $M(A, \underline{e})$ jener (eindeutig bestimmten) linearen Abbildung A überein, die $A(e_i) = f_i$ für alle i, oder kurz $A(\underline{e}) = \underline{f}$ erfüllt.

(ii) Ist $L : V \to V$ eine beliebige lineare Abbildung, dann gilt

$$M(L, \underline{e})_i^j = U_{\underline{e}}^j(L(e_i)).$$

Die i-te Spalte der Matrix $M(A, \underline{e})$ ist also die Koordinatenspalte $U_{\underline{e}}(A(e_i))$.

(iii) Aus (ii) folgt $U_{\underline{e}}(L(v)) = M(L, \underline{e}) \cdot U_{\underline{e}}(v)$.

(iv) Für zwei beliebige Basen $\underline{e}$ und $\underline{f} = A(\underline{e})$ gilt $M(L, \underline{f}) = M(A, \underline{e})^{-1} \cdot M(L, \underline{e}) \cdot M(A, \underline{e})$, oder expliziter

$$M(L, \underline{f})_i^j = \sum_{k,l=1}^{n} \left(M(A, \underline{e})^{-1}\right)_k^j M(L, \underline{e})_l^k M(A, \underline{e})_i^l.$$

Bemerkung 2 *Die Hochstellung der Zeilen- und Tiefstellung der Spaltennummer von Abbildungsmatritzen dient zunächst als Merkhilfe für die Basiswechselformel. Der tiefere Sinn besteht darin, daß diese Schreibweise bei der Bildung basisunabhängiger Definitionen hilft. Dies sei hier durch ein Beispiel angedeutet. Die der Abbildung L und der Basis $\underline{e}$ zugeordnete Zahl $\sum_{i=1}^n M(L, \underline{e})_i^i$ ist wegen*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M(L, \underline{f})_i^i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \left(M(A, \underline{e})^{-1}\right)_k^i M(L, \underline{e})_l^k M(A, \underline{e})_i^l \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} M(L, \underline{e})_l^k \sum_{i=1}^{n} M(A, \underline{e})_i^l \left(M(A, \underline{e})^{-1}\right)_k^i \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} M(L, \underline{e})_l^k M(A \circ A^{-1}, \underline{e})_k^l \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} M(L, \underline{e})_l^k \delta_k^l \\
&= \sum_{i=1}^{n} M(L, \underline{e})_i^i
\end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\underline{e}$ und wird als Spur der linearen Abbildung L, kurz $Sp(L)$, bezeichnet. Im Gegensatz dazu haben etwa die Zahlen $M(L, \underline{e})_j^i$ oder z. B. auch $\sum_{i,j=1}^n M(L, \underline{e})_j^i M(L, \underline{e})_j^i$ diese Eigenschaft im allgemeinen nicht. Die zugrundeliegende Systematik wird im Abschnitt über Tensoren etwas klarer werden.

Definition 2 *Sei V ein K-VR. Für $c \in K$ bezeichnet $\bar{c}$ die zu c konjugiert komplexe Zahl. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$, die für alle $u, v, w \in V$ und für alle $c \in K$ die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt, heißt inneres Produkt (oder auch Metrik) auf V.*

(i) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,

(ii) $\langle u, c(v + w) \rangle = c \langle u, v \rangle + c \langle u, w \rangle$,

(iii) $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in V$ bei festem $v \in V$ impliziert $v = 0$.

Bemerkung 3 *Jedes Skalarprodukt (vgl. MPI, Kap. 4.1) ist auch inneres Produkt, denn im Fall eines Skalarprodukts gelten die Bedingungen (i) und (ii), während Bedingung (iii) durch die Bedingung (iii)': $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$, ersetzt ist. Ist nämlich für ein Skalarprodukt $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in V$ bei festem $v \in V$, dann gilt speziell $\langle v, v \rangle = 0$ und in der Folge wegen (iii)': $v = 0$.*

Bemerkung 4 *Wegen (i) gilt $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Aus (i) und (ii) folgt $\langle c(u + v), w \rangle = \overline{c} \langle u, w \rangle + \overline{c} \langle v, w \rangle$ für alle $u, v, w \in V$ und für alle $c \in K$.*

Beispiel 1 *(Minkowskisches inneres Produkt) Nicht jedes innere Produkt ist auch Skalarprodukt: Sei $K = \mathbb{R}$ und $dim(V) = n + 1$. Eine (geordnete) Basis von V sei durch $\underline{e} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ gegeben. Setzt man*

$$\langle e_i, e_j \rangle := \delta_i^0 \delta_j^0 - \delta_i^1 \delta_j^1 - ... - \delta_i^n \delta_j^n,$$

so folgt für den Vektor $v = \sum_{i=0}^{n} e_i v^i$ *mit* $v^i \in \mathbb{R}$*:*

$$\langle v, v\rangle = (v^0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2.$$

Es gibt Vektoren v *mit* $\langle v, v\rangle > 0$ *(Bsp.* $v = e_0$*), solche mit* $\langle v, v\rangle < 0$ *(Bsp.* $v = e_1$*) und solche mit* $\langle v, v\rangle = 0$ *(Bsp.* $v^i = e_0 + e_1$*). Das innere Produkt*

$$1 = \langle e_0 + e_1, e_0\rangle^2 > \mid \langle e_0 + e_1, e_0 + e_1\rangle \mid \cdot \mid \langle e_0, e_0\rangle \mid = 0$$

zeigt, daß für ein inneres Produkt, das kein Skalarprodukt ist, die Cauchy-Schwartz Ungleichung nicht folgt.

Die Mengen $V_a := \{v \in V / \langle v, v\rangle = a\}$ *für ein festes* $a \in \mathbb{R}$ *sind von folgendem Typ:* V_0 *ist ein Doppelkegel ("Lichtkegel") mit der Spitze* $v = 0$*. Für* $a > 0$ *und* $n \geq 2$ *ist* V_a *ein zweischaliges Rotationshyperboloid im Kegelinneren, und für* $a < 0$ *und* $n \geq 2$ *ein einschaliges Rotationshyperboloid außerhalb des Kegels. Für* $n = 1$ *und* $a \neq 0$ *ist* V_a *eine Hyperbel.*

Definition 3 *Sei* V *ein* K*-VR mit innerem Produkt* $\langle \cdot, \cdot\rangle$*. Eine Basis von* V *sei* $\underline{e} = (e_1, ..., e_n)$*. Die Matrix* $G_{\underline{e}} \in M(n, n, K)$ *mit den Einträgen* $(G_{\underline{e}})_{i,j} := \langle e_i, e_j\rangle$ *heißt metrische (oder Gramsche) Matrix von* $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *zur Basis* $\underline{e}$*.*

Bemerkung 5 *Für alle* $v, w \in V$ *gilt*

$$\langle v, w\rangle = U_{\underline{e}}(v)^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot U_{\underline{e}}(w) = \sum_{i=1}^{n} \overline{U^i_{\underline{e}}(v)} (G_{\underline{e}})_{i,j} U^j_{\underline{e}}(w). \tag{1.2}$$

Hierbei ist für eine Matrix $X \in M(n, m, K)$ *die "adjungierte" Matrix* $X^+ \in M(m, n, K)$ *durch* $(X^+)^i_j := \overline{X^j_i}$ *definiert.*

Bemerkung 6 *Es gilt für jede metrische Matrix:* $\det(G_{\underline{e}}) \neq 0$*. Dies sieht man so: Ist* $\det(G_{\underline{e}}) = 0$*, dann existiert eine* n*-Spalte* $c \neq 0$ *mit* $G_{\underline{e}} \cdot c = 0$*, sodaß für alle* $w \in V$ *und* $v := \underline{e} \cdot c$ *gilt:* $\langle w, v\rangle = U_{\underline{e}}(v)^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot c = 0$*. Wegen* $v \neq 0$ *steht dies im Widerspruch zu Bedingung (iii) eines inneren Produktes.*

Satz 2 *Sei* V *ein* K*-VR mit innerem Produkt* $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *und Basen* $\underline{e}$ *und* $\underline{f} = \underline{e} \cdot A$*, d. h.* $f_i = \sum_{j=1}^{n} e_j A^j_i$*, dann besteht zwischen den metrischen Matritzen zu den beiden Basen der Zusammenhang:* $G_{\underline{f}} = A^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot A$*, oder expliziter*

$$(G_{\underline{f}})_{k,l} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{A^i_k} (G_{\underline{e}})_{i,j} A^j_l.$$

Beweis: Für jedes v und w in V gilt:

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= U_{\underline{e}}(v)^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot U_{\underline{e}}(w) = (A \cdot U_{\underline{f}}(v))^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot A \cdot U_{\underline{f}}(w) \\ &= U_{\underline{f}}{}^+(v) \cdot A^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot A \cdot U_{\underline{f}}(w) = U_{\underline{f}}{}^+(v) \cdot G_{\underline{f}} \cdot U_{\underline{f}}(w). \end{aligned}$$

Daraus folgt für $v = e_i$ und $w = e_j$: $(A^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot A)_{i,j} = (G_{\underline{f}})_{i,j}$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Beispiel 2 *Sei* V *ein* $\mathbb{R}$*-VR, mit Basis* $\underline{e} = (e_1, e_2)$*. Ferner sei* $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *ein inneres Produkt von* V *mit* $G_{\underline{e}} = I_2$ *(=Einheitsmatrix). Zwei Vektoren in* V *seien durch* $f_1 = ae_1 + be_2$ *und* $f_2 = -be_1 + ae_2$ *gegeben, wobei* $a, b \in \mathbb{R}$*. Es gilt also*

$$(f_1, f_2) = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =: \underline{e} \cdot A.$$

Falls $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$ *gilt, dann ist* $\underline{f} = (f_1, f_2)$ *Basis von* V*. Da die metrische Matrix* $G_{\underline{e}} = I_2$ *vorausgesetzt ist, folgt*

$$G_{\underline{f}} = A^+ \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $a^2 + b^2 = 1$ *stimmen die beiden metrischen Matritzen überein:* $G_{\underline{e}} = I_2 = G_{\underline{f}}$*. Die Matrix* A *wird dann als orthogonale Matrix bezeichnet, da ihre Spalten zueinander orthogonale Einheitsvektoren von* $M(2, 1, \mathbb{R})$ *bezüglich des Standardskalarprodukts sind.*

Definition 4 *Sei V ein K-VR mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Basis $\underline{e} = (e_1,..,e_n)$. Die Abbildung $D_{\underline{e}} : V \to M(1,n,K)$, die $D_{\underline{e}}(v) := (\langle v,e_1\rangle,..,\langle v,e_n\rangle)$ erfüllt, heißt kovariante Karte von V zur Basis $\underline{e}$. Die Abbildung $pr_i \circ D_{\underline{e}} =: D_{\underline{e},i} : V \to K$ heißt i-te kovariante Koordinatenfunktion von V zur Basis $\underline{e}$. Hierbei bildet $pr_i : M(1,n,K) \to K$ eine n-Zeile auf den Eintrag in der i-ten Spalte ab.*

Satz 3 *Sei $\underline{e}$ eine Basis eines K-VRs V von der Dimension n. Auf V sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt mit der zugehörigen metrischen Matrix $G_{\underline{e}}$. Dann gilt für alle $v \in V$:*

(i) $D_{\underline{e}}(v) = U_{\underline{e}}(v)^+ \cdot G_{\underline{e}}$ oder expliziter:

$$D_{\underline{e},i}(v) = \sum_{j=1}^{n} \overline{U^j_{\underline{e}}(v)} \cdot (G_{\underline{e}})_{j,i}$$

(ii) $\langle v,w\rangle = D_{\underline{e}}(v) \cdot U_{\underline{e}}(w) = \sum_{j=1}^{n} D_{\underline{e},j}(v) U^j_{\underline{e}}(v)$

(iii) $U_{\underline{e}}$ ist linear und bijektiv; $D_{\underline{e}}$ ist antilinear und bijektiv.

Bemerkung 7 *Eine Abbildung A von einem K-VR V auf einen K-VR W heißt antilinear, falls für alle $v,w \in V, c \in K$ gilt: $A(cv+w) = \overline{c}A(v) + A(w)$.*

Beweis: Zu (i):

$$\begin{aligned} D_{\underline{e},i}(v) &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} U^j_{\underline{e}}(v) \cdot e_j, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{U^j_{\underline{e}}(v)} \langle e_j, e_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{U^j_{\underline{e}}(v)} (G_{\underline{e}})_{j,i}. \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$\begin{aligned} \langle v,w\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} U^j_{\underline{e}}(v) \cdot e_j, \sum_{i=1}^{n} U^i_{\underline{e}}(w) \cdot e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{U^j_{\underline{e}}(v)} \langle e_j, e_i\rangle U^i_{\underline{e}}(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D_{\underline{e},i}(v) U^i_{\underline{e}}(w). \end{aligned}$$

Zu (iii): Die Wohldefiniertheit von $U_{\underline{e}}$ folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung nach Vielfachen von Basisvektoren. Die Linearität von $U_{\underline{e}}$ folgt aus

$$\underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v + \lambda \cdot w) = v + \lambda \cdot w = \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v) + \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(\lambda \cdot w) = \underline{e} \cdot (U_{\underline{e}}(v) + U_{\underline{e}}(\lambda \cdot w)).$$

Zur Injektivität von $U_{\underline{e}}$: $v - w = \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v) - \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(w) = \underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v-w)$, sodaß aus $U_{\underline{e}}(v-w) = 0$ die Gleichung $v = w$ folgt. Die Surjektivität von $U_{\underline{e}}$ folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren. Die Antilinearität der kovarianten Karte ergibt sich aus der Antilinearität des inneren Produktes im ersten Argument. Die Injektivität von $D_{\underline{e}}$ folgt aus Bedingung (iii) der Definition eines inneren Produktes. Die Surjektivititität von $D_{\underline{e}}$ folgt aus Teil (i) des Satzes zusammen mit $\det(G_{\underline{e}}) \neq 0$. □

Bemerkung 8 *Die Formel $D_{\underline{e}}(v) = U_{\underline{e}}(v)^+ \cdot G_{\underline{e}}$ aus Satz (3) zusammen mit der wegen $\det(G_{\underline{e}}) \neq 0$ existenten Inversion $U_{\underline{e}}(v) = G^{-1}_{\underline{e}} \cdot D_{\underline{e}}(v)^+$, die koordinatenweise als*

$$U^i_{\underline{e}}(v) = \sum_{j=1}^{n} (G^{-1}_{\underline{e}})^{i,j} \overline{D_{\underline{e},j}(v)}$$

notiert wird, heißt das "Index-herunter und -hinaufziehen" von Vektorkoordinaten.

Bemerkung 9 *Die für alle $v \in V$ gültige Formel*

$$v = \underline{e} \cdot G^{-1}_{\underline{e}} \cdot D_{\underline{e}}(v)^+ = \sum_{i,j=1}^{n} e_i (G^{-1}_{\underline{e}})^{i,j} \langle e_j, v\rangle \tag{1.3}$$

wird (in Physiktexten) als "Vollständigkeitsrelation" bezeichnet. Als Abbildungsgleichung für die identische Abbildung lautet sie

$$id_V = \sum_{i,j=1}^{n} e_i (G_{\underline{e}}^{-1})^{i,j} \langle e_j, \cdot \rangle . \tag{1.4}$$

In der Quantentheorie tritt sie oft im Spezialfall $G_{\underline{e}} = I$ auf, sodaß sie sich dann zu

$$id_V = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle e_i, \cdot \rangle \tag{1.5}$$

vereinfacht.

Bemerkung 10 **Seien V und W zwei K-VRe mit den Basen $\underline{e}$ (von V) und $\underline{f}$ (von W). DieAbbildung $A : V \to W$ sei linear. Wie in MPI ist die Abbildungsmatrix $M(A, \underline{e}, \underline{f})$ durch*

$$A(e_i) = \sum_{r=1}^{m} f_r M(A, \underline{e}, \underline{f})_i^r$$

definiert. Es gilt also für die kontravarianten Koordinatenspalten von v und $A(v)$

$$U_{\underline{f}}(A(v)) = M(A, \underline{e}, \underline{f}) \cdot U_{\underline{e}}(v).$$

Die Berechnung des Bildes $A(v)$ aus der kovarianten Koordinatenspalte von v geht so:

$$\begin{aligned} A(v) &= \sum_{i=1}^{n} A(e_i) U_{\underline{e}}^i(v) = \sum_{i,j=1}^{n} A(e_i) (G_{\underline{e}}^{-1})^{i,j} \langle e_j, v \rangle \\ &= \sum_{r=1}^{m} f_r \sum_{i,j=1}^{n} M(A, \underline{e}, \underline{f})_i^r (G_{\underline{e}}^{-1})^{i,j} \langle e_j, v \rangle . \end{aligned}$$

Unter Benützung von

$$\langle f_s, A(e_i) \rangle = \sum_{r=1}^{m} (G_{\underline{f}})_{s,r} M(A, \underline{e}, \underline{f})_i^r, \tag{1.6}$$

folgt dann

$$A(v) = \sum_{r,s=1}^{m} f_r (G_{\underline{f}}^{-1})^{r,s} \sum_{i,j=1}^{n} \langle f_s, A(e_i) \rangle (G_{\underline{e}}^{-1})^{i,j} \langle e_j, v \rangle .$$

Für ON-Basen $\underline{e} = \underline{f}$ im Fall $V = W$ mit Skalarprodukt spezialisiert sich dies zur Abbildungsgleichungsgleichung

$$A = \sum_{i,s=1}^{n} e_s \langle e_s, A(e_i) \rangle \langle e_i, \cdot \rangle .$$

In der Quantentheorie werden die Zahlen $\langle e_j, A(e_i) \rangle$ die "Matrixelemente von A" genannt. Sie stimmen nur im Fall von Orthonormalbasen mit den Einträgen $M(A, \underline{e})_i^j$ der Abbildungsmatrix $M(A, \underline{e})$ überein. Im allgemeinen Fall enstehen sie durch Indexherunterziehen gemäß Gleichung (1.6).

Satz 4 *Sei V ein K-VR mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Basen $\underline{e} = (e_1, .., e_n)$ und $\underline{f} = (f_1, .., f_n) = \underline{e} \cdot A$. Dann gilt für alle $v \in V$: $D_{\underline{f}}(v) = D_{\underline{e}}(v) \cdot A$, oder mit $f_i = \sum_{j=1}^{n} e_j A_i^j$ expliziter: $D_{\underline{f},i}(v) = \sum_{j=1}^{n} D_{\underline{e},j}(v) A_i^j$.*

Beweis: $D_{\underline{f},i}(v) = \langle v, f_i \rangle = \left\langle v, \sum_{j=1}^{n} e_j A_i^j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} A_i^j \langle v, e_j \rangle$. □

Beispiel 3 *(Brückenlagerkräfte) Eine Brücke lastet mit der Kraft Ke_1 auf dem Lager eines zweischenkeligen Pfeilers ($K \in \mathbb{R}_{>0}$). Eine ON-Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ des zweidimensionalen reellen VR's V, der von der Schwerkraft und der Brückenachse gebildet wird, sei durch den vertikal nach unten gerichteten Vektor e_1 und den horizontalen Vektor e_2 gebildet. Die zwei Schenkel des Brückenpfeilers unterstützen das Lager aus den Richtungen $-f_1$ und $-f_2$, wobei*

$$\underline{f} := (f_1, f_2) := (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} =: \underline{e}A$$

mit $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ angenommen wird. (Bild!) Unter folgenden Annahmen sollen nun die von den beiden Pfeilerschenkeln auf das Brückenlager ausgeübten Kräfte berechnet werden:

(i) Die Schenkel üben Kräfte $F_i \in \mathbb{R} \cdot f_i$ aus. (Keine schräg zur Achse gerichtete Kraft!)

(ii) Das Lager wird nicht beschleunigt: $F + F_1 + F_2 = 0$.

Lösung: Wegen $\det(A) = \sin(\alpha + \beta) \neq 0$ ist $\underline{f}$ eine Basis von V und es gilt wegen (i) und (ii): $U^i_{\underline{f}}(-F)f_i = F_i$. Es sind somit die kontravarianten Koordinaten von $-F$ zur Basis $\underline{f}$ zu berechnen.

Methode 1):

$$\begin{aligned} U_{\underline{f}}(-F) &= A^{-1} \cdot U_{\underline{e}}(-F) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-K}{\sin(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} \sin\beta \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{-K\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} f_1, \\ F_2 &= \frac{-K\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} f_2. \end{aligned}$$

Welche Beträge haben die Kräfte F_1 und F_2? Dazu wird zunächst die metrische Matrix zur Basis $\underline{f}$ berechnet:

$$G_{\underline{f}} = A^+ G_{\underline{e}} A = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{pmatrix}.$$

Da in der Diagonale von $G_{\underline{f}}$ Einsen stehen, folgt:

$$\begin{aligned} \|F_1\| &= \frac{\sin(\beta)K}{\sin(\alpha+\beta)}, \\ \|F_2\| &= \frac{\sin(\alpha)K}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß $\|F_1\| + \|F_2\| > \|F\|$ gilt. Wegen der Schräglage der Schenkel kommen zusätzliche Kräfte auf, die etwa durch eine in die Pfeiler eingebaute elastische Schicht als Kompression sichtbar gemacht werden können.

Methode 2: *Die kovariante Koordinatenzeile von $-F$ ist:*

$$D_{\underline{f}}(-F) = (\langle -F, f_1 \rangle, \langle -F, f_2 \rangle) = -K(\cos\alpha, \cos\beta).$$

Mit

$$G^{-1}_{\underline{f}} = \frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\alpha+\beta) \\ -\cos(\alpha+\beta) & 1 \end{pmatrix}$$

wird daraus die kontravariante Koordinatenspalte "gezogen":

$$U_{\underline{f}}(-F) = G^{-1}_{\underline{f}} D_{\underline{f}}(-F)^+ = \frac{-K}{\sin^2(\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} \cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis stimmt mit jenem der Methode 1) überein, da

$$\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta\sin(\alpha+\beta).$$

Man beachte, daß die Beträge der Skalarprodukte $\langle -F, f_1\rangle$ und $\langle -F, f_2\rangle$ nicht mit $\|F_1\|$ und $\|F_2\|$ übereinstimmen. So ergibt sich etwa im Fall $\alpha = \beta = 60°$: $\|F_1\| = \|F_2\| = K$ und $\mid \langle F, f_1\rangle \mid = \mid \langle F, f_2\rangle \mid = \frac{K}{2}$. Eine Verwechslung von ko- mit kontravarianten Koordinaten könnte bei der Dimensionierung der Pfeilerstärke fatal sein. Man beachte, daß im Zuge der Methode 1) die Basiswechselmatrix A zu invertieren ist, während bei Methode 2) die metrische Matrix $G_{\underline{f}}$ invertiert wird. In höherdimensionalen Fällen kann dies einen erheblichen Unterschied in der Komplexität der Rechnung ausmachen.

Der folgende Satz klärt die Existenz von Basen, bezüglich derer die metrische Matrix eines inneren Produktes eine besonders einfache Form annimmt. Sie heißen Normalbasen und im Fall von Skalarprodukten auch Orthonormalbasen von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Satz 5 *Sei V ein K-VR mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\dim(V) = n$. Dann existiert genau ein $p \in \{0, 1, ..n\}$ und es existiert eine Basis $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ von V, für die gilt : $G_{\underline{e}} = \eta_n(p)$, wobei die Matrix $\eta_n(p)$ diagonal ist und die oberen p Diagonaleinträge $+1$ und die restlichen $n - p$ Diagonaleinträge -1 sind.*

Beweis: Sei $\underline{f} = (f_1, ..f_n)$ eine beliebige Basis von V. Dann ist $G_{\underline{f}}$ hermitesch. Nach Satz 2 von Kap. 8.7 von MPI hat $G_{\underline{f}}$ ausschließlich reelle Eigenwerte. 0 ist als Eigenwert von $G_{\underline{f}}$ ausgeschlossen. Weiters existiert nach Satz 2 von Kap. 8.7 von MPI eine Basis $(v_1, ..v_n)$ von $M(n, 1K)$, die aus Eigenvektoren von $G_{\underline{f}}$ gebildet ist, die bezüglich des Standardskalarprodukts von $M(n, 1K)$ orthonormiert sind. Somit gilt:

$$v_i^+ \cdot G_{\underline{f}} \cdot v_j = c_i \delta_{i,j},$$

wobei $c_i (\neq 0)$ ein Eigenwert von $G_{\underline{f}}$ ist. Wird die Nummerierung so gewählt, daß $c_1, ..c_p > 0$ und $c_{p+1}, ..c_{p+(n-p)} < 0$ ist, so gilt für die Basis $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ mit $e_i := \frac{f \cdot v_i}{\sqrt{|c_i^2|}}$ die Gleichung $G_{\underline{e}} = \eta_n(p)$. Der Beweis, daß die Zahl p nicht von der Wahl der Basis $\underline{f}$ abhängt, wird weggelassen. □

Bemerkung 11 *Da bei einem Basiswechsel von einer Normalbasis $\underline{e}$ zu einer beliebigen Basis $\underline{f} = \underline{e} \cdot A$, sich die metrische Matrix gemäß $G_{\underline{f}} = A^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot A$ ändert, folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz (Satz 3, Kap. 8.3, MPI)*

$$\det(G_{\underline{f}}) = \det(A^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot A) = \det(G_{\underline{e}}) \mid \det(A) \mid^2 = (-1)^{n-p} \mid \det(A) \mid^2,$$

woraus ersichtlich ist, daß das Vorzeichen von $\det(G_{\underline{f}})$ unabhängig von der Wahl von $\underline{f}$ ist. Man beachte jedoch, daß im Gegensatz zu linearen Abbildungen die Determinante eines inneren Produktes nicht wohldefiniert, da basisabhängig ist.

Beispiel 4 *Für einen reellen VR sei*

$$G_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $G_{\underline{f}}$ sind: $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$. Zugehörige Eigenvektoren sind $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\underline{e} = \underline{f} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

eine Normalbasis und das innere Produkt ist jenes des 2-dimensionalen Minkowskischen VR's. Dieses innere Produkt hat in der Newtonschen Mechanik eines "invertierten" Oszillators die Bedeutung der Energie (vgl. Anhang A, 2. Klausur, Bsp. 2).

1.2 Invarianzen eines inneren Produktes

In diesem Abschnitt bezeichnet V einen endlichdimensionalen Vektorraum mit einem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es werden unter den linearen Abbildungen $A : V \to V$ jene ausgesondert und auf ihren Eigenheiten hin untersucht, welche die inneren Produkte $\langle v, w \rangle$ sämtlicher Paare $(v, w) \in V \times V$ unverändert lassen. Sie heißen Invarianzen. Da (euklidische) Winkel und Längen von Lagevektoren mit Hilfe von Skalarprodukten definiert werden, ist glaubhaft, daß den Invarianzen des euklidischen Skalarprodukts bei der Bewegung eines starren Körpers eine entscheidende Rolle zukommt. Invarianzen dienen dazu, aus einer Teilmenge von V, die einem physikalischen Zustand entsprechen kann, neue Situationen hervorgehen zu lassen, die in ihren inneren Verhältnissen unverändert sind. In Umkehrung dieser Einsicht wurde das Minkowskische innere Produkt aus seinen Invarianzen erschlossen. In der Quantentheorie legt ein skalares Produkt die Ereigniswahrscheinlichkeiten fest. Wiederum sind es Invarianzen, die bei der Beschreibung von Zustandsklassen gleicher innerer Beziehungen eine wichtige Rolle spielen.

Definition 5 *Eine lineare Abbildung $A : V \to V$, die für alle $v, w \in V$ die Bedingung $\langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ erfüllt, heißt Invarianz (Symmetrie, Isometrie) des inneren Produktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Beispiel 5 *In Beispiel (2) ist A eine Invarianz, falls $a^2 + b^2 = 1$ gilt.*

Satz 6 *A ist eine Invarianz von $V, \langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow \langle A(v), A(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ für alle $v \in V$.*

Beweis: Dieses Invarianzkriterium ist klar aufgrund der direkt zu verifizierenden Polarisierungsformeln

$$4 \langle v, w \rangle = \langle v + w, v + w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle , \tag{1.7}$$

für $K = \mathbb{R}$ und

$$2 \langle v, w \rangle = \langle v + w, v + w \rangle - i \langle v + iw, v + iw \rangle - (1 - i) (\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle) , \tag{1.8}$$

für $K = \mathbb{C}$, die zeigen, daß das innere Produkt zwischen zwei beliebigen Vektoren durch innere Produkte zwischen denselben Vektoren auszudrücken sind. □

Satz 7 *Sei $A : V \to V$ linear und $\underline{e}$ eine Basis, $f_i := A(e_i)$. Dann sind die Aussagen (i), (ii), (iii) äquivalent: (i) A ist Invarianz, (ii) $\langle f_i, f_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ für alle $i.j$, (iii) $G_{\underline{e}} = M(A, \underline{e})^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot M(A, \underline{e})$.*

Beweis: Nachrechnen. □

Bemerkung 12 *Hier bezeichnet $M(A, \underline{e})$ die Matrix von A zur Basis $\underline{e}$. Besonders einfach wird dieses Kriterium im Fall einer Normalbasis $\underline{e}$, für die die metrische Matrix $G_{\underline{e}}$ diagonal mit ± 1 Einträgen in der Diagonale ist. Dann sagt Kriterium (ii), daß A genau dann Invarianz ist, wenn das Bild einer Normalbasis unter A ebenfalls Normalbasis ist.*

Korollar 8 *Aus (iii) ergibt sich für eine Invarianz A die Aussage: $\mid \det(A) \mid = 1$.*

Satz 9 *Die Menge Inv aller Invarianzen von $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Untergruppe der $GL_K(V)$. Die Menge $SInv$ der Invarianzen A mit $\det(A) = 1$ ist eine Untergruppe von Inv.*

Beweis: Wird weggelassen. □

Bemerkung 13 *Die Gruppe $GL_K(V)$ der bijektiven linearen Abbildungen $A : V \to V$ ist in Teil 1 von Satz 2 in Kap 3.3, MPI beschrieben. Die Gruppenmultiplikation ist die Hintereinanderausführung von Abbildungen.*

Bemerkung 14 *Der Satz bildet die Basis vieler in der Physik auftretenden "Symmetriegruppen", wie Drehgruppe, Lorentzgruppe, Unitäre Symmetrie, Isospinsymmetrie. Nicht in das hier behandelte Schema von Invarianzen innerer Produkte fällt etwa die Galileigruppe. Die Bedeutung von Symmetiegruppen für die Physik liegt in der Tatsache, daß sie Ordnung und Übersicht in die Mengen von Zuständen und Vorgängen bringen. Dies geschieht so. Zustandsmengen werden durch symmetriebedingte Erhaltungssätze in disjunkte Teilmengen zerfällt, aus denen die Zeitevolution nicht herausführt. Die Gruppe faßt verschiedene Zustände und Trajektorien von "nahezu" gleicher Physik zu "Gruppenorbits" zusammen. Interessant sind Vergleiche zwischen den Orbits.*

Bemerkung 15 *Die üblichen Bezeichnungen für Invarianzgruppen sind im Fall:* $G_{\underline{e}} = \eta_n(p)$ *(für eine Normalbasis):*

(i) $K = \mathbb{C}$ *: (spezielle) unitäre Gruppen* $(S)Inv = (S)U(p, n-p), (S)U_n = (S)U(n, 0)$,

(ii) $K = \mathbb{R}$ *: (spezielle) orthogonale Gruppen:* $(S)Inv = (S)O(p, n-p), (S)O_n = (S)O(n, 0)$.

1.3 Zweidimensionale Drehungen

In diesem Abschnitt bezeichnet V einen 2-dimensionalen reellen VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es wird die Menge der Invarianzen von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ "katalogisiert", d. h. es wird für O_2 eine Bijektion ("Parametrisierung")

$$\phi_{\underline{e}} : \{1, -1\} \times [0, 2\pi) \to O_2$$

beschrieben. Die Funktion $\phi_{\underline{e}}$ ist als eindeutiges "Adressierungsschema" aufzufassen, wobei ein Element von O_2 durch zwei Zahlen $(\varepsilon, \theta) \in \{1, -1\} \times [0, 2\pi)$ identifiziert ist und aus diesen berechnet werden kann.

Satz 10 *Sei* $A : V \to V$ *eine Invarianz und sei* $\underline{e}$ *ON-Basis von* V. *Dann existiert genau ein* $(a, b) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ *mit* $a^2 + b^2 = 1$, *sodaß gilt:*

(i) $M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, *falls* $A \in SO_2$, *(ii)* $M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, *falls* $A \notin SO_2$.

Beweis: Das Invarianzkriterium $M(A, \underline{e})^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot M(A, \underline{e}) = G_{\underline{e}}$ impliziert im Fall der ON-Basis $\underline{e}$, daß die Einträge a, b, c, d der Matrix von A

$$M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

die folgenden drei Gleichungen erfüllen:

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{1.9a}$$
$$c^2 + d^2 = 1 \tag{1.9b}$$
$$ac + bd = 0 \tag{1.9c}$$

Lemma 11 *Für Zahlen* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *die die Gleichungen* (1.9*a*), (1.9*b*) *und* (1.9*c*) *erfüllen, gilt:*

(i) $ad - bc > 0 \Rightarrow a = d, b = -c$

(ii) $ad - bc < 0 \Rightarrow a = -d, b = c$

Wegen $\det(A) = ad - bc$ folgt die Aussage des Satzes aus der Behauptung des Lemmas. □

Beweis des Lemmas: Multiplikation der Gleichung (1.9*a*) mit Gleichung (1.9*b*) ergibt mit der aus Gleichung (1.9*c*) folgenden Substitution $a^2c^2 = b^2d^2$ die Gleichung

$$a^2d^2 + b^2c^2 + 2b^2d^2 = 1 \tag{1.10}$$

Dieselbe Substitution ergibt für $(ad-bc)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 + 2b^2d^2$, sodaß mit Gleichung (1.10) die Gleichung $(ad-bc)^2 = 1$ folgt. Im Fall (i) folgt daraus unter Verwendung von (1.9*a*) und (1.9*b*) $(a-d)^2 + (b+c)^2 = 0$, also die Behauptung (i) des Lemmas. Im Fall (ii) folgt analog $(a+d)^2 + (b-c)^2 = 0$. □

Lemma 12 *Für* $(a, b) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ *mit* $a^2 + b^2 = 1$ *existiert genau ein* $\theta \in [0, 2\pi)$ *mit* $a = \cos\theta$ *und* $b = \sin\theta$.

Beweis: $a = 1 = \cos\theta$ hat in $[0, 2\pi)$ die eindeutige Lösung $\theta = 0$ und $a = -1 = \cos\theta$ hat in $[0, 2\pi)$ die eindeutige Lösung $\theta = \pi$. In beiden Fällen gilt $0 = b = \sin\theta$. Nun zum Fall $-1 < a < 1$: Inspektion des Graphen von cos zeigt, daß genau ein $0 < \theta_1 < \pi$ und genau ein $\pi < \theta_2 < 2\pi$ existiert, sodaß $a = \cos\theta_1 = \cos\theta_2$ gilt. Wegen $\sin\theta > 0$ für $0 < \theta < \pi$ ist für $b > 0$ daher θ_1 die eindeutige Lösung von $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ und analog ist für $b < 0$ der Winkel θ_2 die eindeutige Lösung. □

Bemerkung 16 *Damit ist bei gewählter Basis $\underline{e}$ die Abbildung $\phi_{\underline{e}} : \{1,-1\} \times [0,2\pi) \to O_2$ mit*

$$M(\phi_{\underline{e}}(\varepsilon,\theta),\underline{e}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$$

eine Bijektion. Es gilt: $\det(\phi_{\underline{e}}(\varepsilon,\theta)) = \varepsilon$. *Eine Abbildung $\phi_{\underline{e}}(1,\theta)$ heißt Drehung von V um den Wikel $0 \le \theta < 2\pi$ mit dem zur Basis $\underline{e}$ gehörigen Drehsinn: "e_1 wird in Richtung e_2 um den Winkel $0 \le \theta < 2\pi$ gedreht". Es bleibt noch zu untersuchen, wie die Abbildung $\phi_{\underline{e}}(1,\theta)$ von der Wahl der ON-Basis $\underline{e}$ abhängt. Es zeigt sich, daß $\phi_{\underline{e}}(1,\theta)$ innerhalb der beiden Orientierungsklassen aller Basen von V konstant in $\underline{e}$ ist. Dies wird im nächsten Satz genauer formuliert und bewiesen. Wird daher eine der beiden Orientierungsklassen von Basen als "positiv orientierte" ausgezeichnet, dann ist die Parametrisierung $\phi : (1,\theta) \mapsto \phi_{\underline{e}}(1,\theta)$ (mit $\underline{e}$ positiv orientiert und ansonsten beliebig) basisunabhängig. $\phi(1,\theta)$ heißt dann Drehung von V um den Winkel θ mit dem zur Orientierung von V gehörigen Drehsinn.*

Bemerkung 17 *Die Abbildung $\phi_{\underline{e}}(-1,\theta)$ ist eine Spiegelung an der Achse*

$$\mathbb{R} \cdot (\cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2).$$

Sie hat den Eigenraum $\mathbb{R} \cdot (\cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2)$ zum Eigenwert 1 und den Eigenraum $\mathbb{R} \cdot (\sin\frac{\theta}{2}e_1 - \cos\frac{\theta}{2}e_2)$ zum Eigenwert -1. (Nachrechnen!) Eine ähnlich einfache basisunabhängige Parametrisierung wie im Fall der Drehungen ist hier nicht möglich, da der Winkel zwischen Spiegelachse und Basis von der Wahl der Basis abhängt.

Satz 13 *Sei $A : V \to V$ Element von SO_2 und seien $\underline{e}$ und $\underline{f}$ zwei ON-Basen von V. Dann gilt:*
(i) $M(A,\underline{e}) = M(A,\underline{f})$, falls $\underline{e}$ und $\underline{f}$ gleich orientiert sind, und
(ii) $M(A,\underline{e}) = M(A,\underline{f})^{-1} = M(A,\underline{f})^{+}$, falls $\underline{e}$ und $\underline{f}$ ungleich orientiert sind.

Korollar 14 *Eine Drehung A von V um den Winkel $0 \le \theta < 2\pi$ mit dem zur Orientierung von V gehörigen Drehsinn hat bezüglich einer positiv orientierten Basis $\underline{e}$ die Matrix*

$$M(A,\underline{e}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

und bezüglich einer negativ orientierten Basis $\underline{f}$ die Matrix

$$M(A,\underline{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes: Seien zunächst $\underline{e}$ und $\underline{f}$ zwei gleich orientierte ON-Basen von V. Dann existiert nach Satz (10), Teil (i) genau ein $(\alpha,\beta) \in [-1,1] \times [-1,1]$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, sodaß gilt:

$$\underline{f} = \underline{e}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} =: \underline{e} \cdot X.$$

Aus $A \in SO_2$ folgt

$$M(A,\underline{e}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Daher gilt $M(A,\underline{f}) = X^{-1} \cdot M(A,\underline{e}) \cdot X = X^{+} \cdot M(A,\underline{e}) \cdot X$. Ausführung der Matrixmultiplikation ergibt $M(A,\underline{f}) = M(A,\underline{e})$. Im Fall ungleich orientierter Basen gilt

$$\underline{f} = \underline{e}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} =: \underline{e} \cdot Y.$$

Analog ist $M(A,\underline{f}) = Y^{-1} \cdot M(A,\underline{e}) \cdot Y = Y^{+} \cdot M(A,\underline{e}) \cdot Y$ zu berechnen. Es ergibt sich $M(A,\underline{f}) = M(A,\underline{e})^{-1}$. □

Satz 15 *Sei A eine Drehung von V um den Winkel $0 \leq \theta < 2\pi$ mit dem zur Orientierung von V gehörigen Drehsinn. Dann gilt für die (eindeutig bestimmte!) lineare Abbildung L, deren Matrix bezüglich einer beliebigen, positiv orientierten ON-Basis $\underline{e}$ von V durch*

$$M(L, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist:

$$A = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\theta^n}{n!} L^n =: e^{\theta L},$$

wobei L^n die n-fache Hintereinanderausführung von L bezeichnet.

Bemerkung 18 *Eine lineare Abbildung A eines normierten VR's heißt Limes einer Folge von linearen Abbildungen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls für alle $v \in V$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \parallel A_n(v) - A(v) \parallel = 0.$$

Beweis des Satzes: Die Wohldefiniertheit der Abbildung L folgt aus der Basiswechselformel im Fall des Übergangs von einer positiv orientierten ON-Basis $\underline{e}$ zu einer weiteren positiv orientierten ON-Basis $\underline{f} := \underline{e} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =: \underline{e} \cdot X$ mit $a^2 + b^2 = 1$:

$$M(L, \underline{f}) = X^{-1} \cdot M(L, \underline{e}) \cdot X = X^{+} \cdot M(L, \underline{e}) \cdot X.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b & -a \\ a & -b \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sodaß $M(L, \underline{f}) = M(L, \underline{e})$ gezeigt ist. Zur Berechnung der Reihe prüft man zunächst $L^2 = -id_V$. Damit folgt dann $L^{2n} = (-1)^n id_v$ und $L^{2n+1} = (-1)^n L$. Nun bietet sich die Zerlegung der Partialsummen in gerade und ungerade "Potenzen" L^n an:

$$\sum_{n=0}^{2N} \frac{\theta^n}{n!} L^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} id_v + \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} L$$

Der Limes dieser Folge von linearen Abbildungen ist dann nach MPI, Kap. 6.3, Satz 1, Teil 5 die lineare Abbldung $(\cos\theta) id_v + (\sin\theta) L$, deren Matrix bezüglich $\underline{e}$ durch

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben ist, sodaß $A = (\cos\theta) id_v + (\sin\theta) L$ folgt. □

Bemerkung 19 *Das Vektorfeld $\{(v, L(v)) \mid v \in V\} \subset V \times V$ ergibt die (linearen) Tangentialapproximationen an die Kurven $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ bei 0, die durch*

$$\gamma_v(\theta) := e^{\theta L}(v)$$

definiert sind, in folgender Weise. In leichter Verallgemeinerung von MPI, Kap. 7.1 ist die Tangentialapproximation von γ_v durch die Gleichung

$$\gamma_v(\theta) = \gamma_v(0) + d_0\gamma_v(\theta) + g(\theta)$$

definiert, wobei die Funktion g die Bedingung

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\| g(\theta) \|}{\theta} = 0$$

erfüllt, und $d_0\gamma_v \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, V)$. Es gilt nämlich (ohne Beweis aber mit Bild!)

$$d_s\gamma_v(\theta) = \theta \cdot (L \circ e^{sL})(v)$$

In der folgenden Formel ist dieses Ergebnis enthalten und leicht zu merken:

$$\frac{d}{d\theta} e^{\theta L} = L \circ e^{\theta L}.$$

Die lineare Abbildung L wird als Drehgenerator bezeichnet.

1.4 Drehen von Funktionen

Invarianzen eines inneren Produktes eines Vektorraums V, wie z. B. Drehungen, treten in Modellen der Physik meist nicht in der bisher vorgestellten minimalistischen Konzeption von Abbildungen von V auf sich selbst auf, sondern in Form von daraus abgeleiteten reichhaltiger strukturierten Konzepten. Von einer Invarianz "transformiert" werden Massendichten, Kraftfelder etc. Viele der in der Physik diskutierten "Transformationen" werden von der folgenden sehr allgemeinen Definition erfaßt.

Definition 6 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und X eine Menge. Dann heißt eine Abbildung $\mu : G \times X \to X$ eine Linksoperation von G auf X, falls für alle $A, B \in G$ und für alle $x \in X$ gilt:*

(i) $\mu(B, \mu(A, x)) = \mu(B \cdot A, x)$ und

(ii) $\mu(e, x) = x$.

Ein Element $x \in X$ heißt (μ-)invariant unter einer Untergruppe $G' \subset G$, falls $\mu(A, x) = x$ für alle $A \in G'$ gilt. Wenn die Operation μ aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, heißt x auch kurz G'-invariant.

Bemerkung 20 *Die Abbildung $\mu(A, \cdot) : X \to X, x \mapsto \mu(A, x)$ gibt die "Wirkung" des Gruppenelements $A \in G$ auf die Elemente von X an. Die Gruppenelemente werden durch diese Abbildungen "dargestellt".*

Beispiel 6 *Ein K-VR V sei mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ausgestattet. Die Invarianzgruppe Inv von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ "operiert" auf dem $\mathbb{C}$-VR E der Funktionen $\psi : V \to \mathbb{C}$ auf die folgende Weise (von links):*

$$\mu_s(A, \psi) := \psi \circ A^{-1}$$

Jede Abbildung $A \in Inv$ ordnet jeder $\mathbb{C}$-wertigen Funktion ψ eine "A-transformierte" Funktion zu. ("Skalare" Gruppenoperation) Die Relationen (i) und (ii) einer Linksoperation sind realisiert. Die Funktion $\mu_s(A, \psi)$ hat an der Stelle $A(v)$ denselben Wert wie ψ an der Stelle v. Ein Beispiel für eine unter der ganzen Invarianzgruppe μ-invariante Funktion ist $\psi : V \to \mathbb{C}$ mit: $\psi(v) := \langle v, v \rangle$. Nicht invariant unter Inv hingegen ist für $w \in V$ die Funktion $\psi_w : V \to \mathbb{C}$ mit: $\psi_w(v) := \langle w, v \rangle$. Invariant unter ganz Inv wiederum ist die Funktion $\psi : V \times V \to \mathbb{C}$ mit: $\psi(v, w) := \langle w, v \rangle$ bezüglich der skalaren Operation

$$\mu_s(A, \psi) := \psi \circ (A^{-1} \times A^{-1}) : (v, w) \mapsto \psi(A^{-1}v, A^{-1}w).$$

Moral: Ohne Angabe des Definitionsbereiches von ψ läßt sich aus der verhunzten Formel $\psi = \langle w, v \rangle$ nicht entscheiden, ob ψ invariant unter O_2 ist, oder nicht.

Beispiel 7 *Eine weitere Linksoperation von Inv ist durch*

$$\mu_{ps}(A, \psi) := \det(A) \cdot \psi \circ A^{-1}$$

gegeben. ("Pseudoskalare" Gruppenoperation.) Im Spezialfall eines orientierten reellen dreidimensionalen VR's mit Skalarprodukt und positiv orientierter Orthonormalbasis $\underline{e}$ und der zugehörigen kontravarianten Karte $U_{\underline{e}}$ ist etwa die Funktion

$$\psi : V \times V \times V \to \mathbb{R}, \quad \psi(u, v, w) := \det\left(U_{\underline{e}}(u), U_{\underline{e}}(v), U_{\underline{e}}(w)\right)$$

invariant unter O_3 bezüglich der pseudoskalaren Operation

$$\mu_{ps}(A,\psi) := \det(A)\cdot\psi\circ(A^{-1}\times A^{-1}\times A^{-1}).$$

(Beweis über Determinantenmultiplikationssatz) Wegen $\psi(u,v,w) = \langle u, v\times w\rangle$ ("Spatproduktformel") gibt der Absolutbetrag des Funktionswertes $\psi(u,v,w)$ das "Volumen" des von den drei Vektoren u,v,w gebildeten Parallelotops an. (Genaueres im Kapitel über "metrisches Volumen"; dort wird auch die Spatproduktformel bewiesen.)

Im folgenden wird die skalare Linksoperation der Gruppe SO_2 auf $\mathbb{C}$-wertigen differenzierbaren Funktionen eines zweidimensionalen reellen VR's V mit Skalarprodukt weiterbehandelt. Diese Operation gibt Anlaß zu dem in der Quantenphysik wichtigen "Drehimpulsoperator". Er liefert ein einfaches Kriterium für die Drehinvarianz einer diffbaren Funktion.

Satz 16 *Sei V ein orientierter, 2-dimensionaler, reeller VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Die (eindeutige!) lineare Abbildung $L: V\to V$ sei jene, die bezüglich einer beliebigen positiv orientierten ON-Basis $\underline{e}$ von V die Matrix $M(L,\underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ hat. $E := \{\psi: V\to\mathbb{C} \mid \psi \text{ diffbar}\}$. Die Operation $\mu_s: SO_2\times E\to E$ sei wie oben durch $\mu_s(A,\psi) := \psi\circ A^{-1}$ erklärt. Die Abbildung $\mathcal{L}: E\to Abb(V,\mathbb{C})$ sei durch*

$$\mathcal{L}(\psi): v\mapsto -(d_v\psi)(L(v))$$

definiert. Dann gilt: ψ ist genau dann μ_s-invariant unter SO_2, falls $\mathcal{L}(\psi)=0$.

Beweis: Sei für $v\in V$ die Kurve $\gamma_v:\mathbb{R}\to V$ mit $\gamma_v(\theta) := e^{-\theta L}(v)$. Die um θ "gedrehte" Funktion ψ ist $\mu_s(e^{\theta L},\psi) = \psi\circ e^{-\theta L}$, sodaß $\mu_s(e^{\theta L},\psi)(v) = \psi\circ\gamma_v(\theta)$ gilt. Da jedes Element $A\in SO_2$ vom Typ $e^{\theta L}$ ist, gilt: ψ ist genau dann μ_s-invariant unter SO_2, falls für jedes $v\in V$ die diffbare(!) Funktion $\psi\circ\gamma_v$ konstant ist, oder äquivalent dazu, $d_\theta(\psi\circ\gamma_v) = 0$ für alle $\theta\in\mathbb{R}$ gilt. Das Differential der zusammengesetzten Funktion $\psi\circ\gamma_v$ wird nach der Kettenregel mit $w := \gamma_v(\theta)$ berechnet:

$$(d_\theta(\psi\circ\gamma_v))(t) = (d_{\gamma_v(\theta)}\psi\circ d_\theta\gamma_v)(t) = (d_{\gamma_v(\theta)}\psi)(-tL(\gamma_v)) = -t(d_w\psi)(L(w)).$$

Damit ist die Konstanz der Funktionen $\psi\circ\gamma_v$ genau dann gegeben, wenn für alle $w\in V$ die Gleichung $(d_w\psi)(L(w)) = 0$ gilt. □

Bemerkung 21 *Die dem Drehvektorfeld $\{(v, L(v)) \mid v\in V\}$ zugeordnete Ableitungsvorschrift $\mathcal{L}$ hat die folgende anschauliche Bedeutung. Man bilde an jedem Punkt von V die Richtungsableitung von ψ in Richtung des am jeweiligen Punkt vorliegenden negativen Drehvektorfeldes. Somit bestimmt $(\mathcal{L}(\psi))(v)$ die lineare Tangentialapproximation der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion*

$$\psi\circ\gamma_v:\theta\mapsto(\mu_s(e^{\theta L},\psi))(v) = \psi(e^{-\theta L}(v))$$

an der Stelle 0:

$$\psi\circ\gamma_v(\theta) = \psi\circ\gamma_v(0) + \theta(\mathcal{L}(\psi))(v) + o(\theta).$$

Der Satz sagt also, daß ψ genau dann drehinvariant ist, wenn die Funktionen $\psi\circ\gamma_v$ für alle $v\in V$ in linearer Approximation bei 0 konstant sind.

Bemerkung 22 *In Physiktexten findet sich $\mathcal{L}$ meist ausgedrückt durch die kontravariante Karte von V zu einer positiv orientierten ON-Basis $\underline{e}$ von V. Die entsprechende Formel ergibt sich mit den Bezeichnungen*

$$U^1_{\underline{e}} =: x,\quad U^1_{\underline{e}} =: y,\quad \psi =: \phi\circ(x,y)$$

wegen $x\circ L = -y$ und $y\circ L = x$

$$\mathcal{L}(\psi) = -\left(x\circ L\frac{\partial}{\partial x} + y\circ L\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(x,y) = \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(x,y).$$

Bemerkung 23 *Vielfach wird auch $\mathcal{L}$ als Drehvektorfeld oder auch Drehgenerator bezeichnet. Und tatsächlich läßt sich auf dem für die Quantentheorie relevanten Funktionenraum, der nicht mit E übereinstimmt, die Formel $\mu_s(e^{\theta L},\psi) = e^{\theta\mathcal{L}}(\psi)$ etablieren.*

Beispiel 8 *Für die drehinvariante Funktion $\psi : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v, v\rangle$ soll $\mathcal{L}(\psi) = 0$ kontrolliert werden. Es gilt $\psi(v+w) = \psi(v) + 2\langle v, w\rangle + \psi(w)$. Wegen*

$$\lim_{w\to 0} \frac{\psi(w)}{\|w\|} = 0,$$

folgt $(d_v\psi)(w) = 2\langle v, w\rangle$ und daher

$$(\mathcal{L}(\psi))(v) = -2\langle v, L(v)\rangle = -2\left\langle v^1 e_1 + v^2 e_2, v^1 e_2 - v^2 e_1\right\rangle = 0.$$

Alternativ mit partiellen Ableitungen des Kartenausdrucks $\phi = x^2 + y^2$ von ψ:

$$\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(x,y) = 2yx - 2xy = 0.$$

1.5 2D Lorentztransformationen

In diesem Abschnitt bezeichnet V einen zweidimensionalen reellen VR mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dessen metrische Matrix bezüglich einer Normalbasis die Standardmatrix $\eta_2(1)$ ist. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Minkowskischer Vektorraum der Dimension 2. Auf V sei eine Orientierung gegeben und einer der beiden Kegel, die den Doppelkegel $V_0 := \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 0\}$ bilden, sei als "Zukunftskegel" V_0^+ ausgezeichnet. Eine Normalbasis $\underline{e} = (e_0, e_1)$ von V, für die $e_0 \in V_0^+$ gilt, heißt zukunftsgerichtete Normalbasis. In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der Invarianzgruppe $O(1,1)$ behandelt. Die Elemente von $O(1,1)$ heißen (zweidimensionale) Lorentztransformationen.

Satz 17 *Sei $\underline{e}$ eine zukunftsgerichtete, positiv orientierte Normalbasis von V. Dann ist durch die Formel*

$$M(\phi_{\underline{e}}(\tau,\varepsilon,\beta),\underline{e}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} \tau & \varepsilon\beta \\ \tau\beta & \varepsilon \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

eine Bijektion $\phi_{\underline{e}} : \{1,-1\}\times\{1,-1\}\times(-1,1) \to O(1,1)$, eine "Parametrisierung von $O(1,1)$" definiert.

Beweis: Aufgrund des Invarianzkriteriums gilt für die (reelle) Matrix

$$M(A,\underline{e}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

einer Invarianz A bezüglich einer Normalbasis $\underline{e}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixeinträge erfüllen somit die Gleichungen

$$a^2 - b^2 = 1, \tag{1.12a}$$
$$d^2 - c^2 = 1 \tag{1.12b}$$
$$ac - bd = 0 \tag{1.12c}$$

Die beiden Gleichungen (1.12a) und (1.12b) sind äquivalent zu $a = \tau\sqrt{1+b^2}$ und $d = \varepsilon\sqrt{1+c^2}$ mit $\varepsilon, \tau \in \{1,-1\}$. Einsetzen in das Quadrat von Gleichung (1.12c) ergibt: $b^2 = c^2$, woraus wiederum $a = \tau\sqrt{1+b^2}, d = \varepsilon\sqrt{1+b^2}, c = \sigma b$ mit $\varepsilon, \sigma, \tau \in \{1,-1\}$ folgt. Einsetzen in Gl. (1.12c) ergibt $\sigma\tau b = \varepsilon b$, sodaß sich

$$M(A,\underline{e}) = \begin{pmatrix} \tau\sqrt{1+b^2} & \varepsilon\tau b \\ b & \varepsilon\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}$$

ergibt. Mit der Definition $b =: \frac{\tau\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ folgt $1 + b^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$, womit der Satz bewiesen ist. □

Bemerkung 24 *(i) Es gilt* $\det(\phi_{\underline{e}}(\tau,\varepsilon,\beta)) = \tau\varepsilon$.

(ii) Die Einschränkung von $\phi_{\underline{e}}$ *auf* $\{1\}\times\{1\}\times(-1,1)$ *hat als Bild die Menge*

$$SO_+(1,1) := \left\{ A \in O(1,1) \mid M(A,\underline{e}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset SO(1,1).$$

Elemente von $SO_+(1,1)$ *bilden zukunftsgerichtete Normalbasen in zukunftsgerichtete Normalbasen gleicher Orientierung ab und heißen "eigentliche, orthochrone Lorentztransformationen".* $SO_+(1,1)$ *ist Untergruppe von* $SO(1,1)$.

(iii) Die Einschränkung von $\phi_{\underline{e}}$ *auf* $\{1\}\times\{1\}\times(-1,1)$ *hängt nicht mehr von der Wahl der zukunftsgerichteten, orientierten Normalbasis* $\underline{e}$ *ab und ergibt daher wie im Fall der* SO_2 *eine basisunabhängige Parametrisierung* $\phi(\beta) := \phi_{\underline{e}}(1,1,\beta)$ *von* $SO_+(1,1)$. *Die Abbildung* $\phi(\beta)$ *heißt "Boost von* V *auf Relativgeschwindigkeit* $c\beta$*" (bezüglich der gewählten Orientierung und des gewählten Zukunftskegels).*

Lemma 18 *Mit* $\tanh(\alpha) := \beta$ *gilt (*α *heißt Rapidität zur Relativgeschwindigkeit* $c\beta$*)*

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \tau & \varepsilon\beta \\ \tau\beta & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau\cosh(\alpha) & \varepsilon\sinh(\alpha) \\ \tau\sinh(\alpha) & \varepsilon\cosh(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Beweis: Da die Abbildung $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ bijektiv ist, existiert für jedes $\beta \in (-1,1)$ genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$, mit $\beta = \tanh(\alpha)$. Aus $1-\beta^2 = \frac{\cosh^2(\alpha)-\sinh^2(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)} = \cosh^{-2}(\alpha)$ folgt dann $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh(\alpha)$, sodaß die Behauptung des Lemmas bewiesen ist. □

Satz 19 *Sei* $A \in SO_+(1,1)$. *Dann existiert genau ein* $\alpha \in \mathbb{R}$, *sodaß*

$$M(A,\underline{e}) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

bezüglich jeder beliebigen positiv orientierten zukunftsgerichteten Normalbasis $\underline{e}$ *von* V *gilt. Sei* $B : V \to V$ *linear mit*

$$M(B,\underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Dann ist B *unabhängig von der Wahl von* $\underline{e}$ *und es gilt*

$$A = e^{\alpha B}. \tag{1.16}$$

Beweis: Das Bestehen der Gleichung (1.14) bezüglich einer bestimmten positiv orientierten zukunftsgerichteten Normalbasis folgt unmittelbar aus Satz (17) und Lemma (18). Die Gültigkeit der Exponentialformel bezüglich der Basis $\underline{e}$ folgt ähnlich wie im Fall der Drehungen aus $B^2 = id_V$ durch Aufsummieren der geraden und ungeraden Terme der Exponentialreihe mit $\cosh(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$ und $\sinh(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Die Gültigkeit derselben Gleichung mit demselben Wert von α bezüglich einer beliebigen anderen positiv orientierten zukunftsgerichteten Normalbasis $\underline{f}$ ist folgendermaßen zu sehen. Es gilt für ein $\alpha' \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\underline{f} = \underline{e} \begin{pmatrix} \cosh(\alpha') & \sinh(\alpha') \\ \sinh(\alpha') & \cosh(\alpha') \end{pmatrix} =: \underline{e} \cdot X(\alpha')$. Wegen

$$M(B,\underline{f}) = X(\alpha')^{-1} M(B,\underline{e}) X(\alpha')$$

ergibt sich mit $C := \cosh(\alpha')$ und $S := \sinh(\alpha')$

$$M(B,\underline{f}) = \begin{pmatrix} C & -S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & S \\ S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sodaß aus der Basisunabhängigkeit von B, d. h. aus $M(B,\underline{f}) = M(B,\underline{e})$, auch $M(e^{\alpha B},\underline{e}) = M(e^{\alpha B},\underline{f})$ folgt. □

Bemerkung 25 *Analog zum Fall der Drehungen gibt das "Boostvektorfeld"* $\{(v, B(v)) \mid v \in V\}$ *die Tangentialapproximation an die Kurven* $\gamma_v : R \to V, \gamma_v(\alpha) := e^{\alpha B}(v)$ *bei 0:* $d_0\gamma_v(t) = tB(v)$. *(Bild!)*

Beispiel 9 *("Relativistische Geschwindigkeitsaddition") Problem: Für welches β_3 gilt $\phi(\beta_2) \circ \phi(\beta_1) = \phi(\beta_3)$?*

Lösung:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{(1-\beta_2^2)(1-\beta_1^2)}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \\ \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Eine kurze Nebenrechnung verifiziert, daß $SO_+(1,1)$ abgeschlossen bezüglich der Gruppenmultiplikation ist:

$$\sqrt{\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{(1-\beta_2^2)(1-\beta_1^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}}.$$

Somit ist $\beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ gezeigt. Diese Formel bedeutet im Zusammenhang der relativistischen Mechanik folgendes: Hat ein Massenpunkt P_3 die Relativgeschwindigkeit $c\beta_2$ zu einem Massenpunkt P_2 und dieser wiederum die Relativgeschwindigkeit $c\beta_1$ zu einem Massenpunkt P_1, so hat P_3 zu P_1 die Relativgeschwindigkeit

$$c\beta_3 = c\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}.$$

(Die Konstante $c > 0$ ist die Lichtgeschwindigkeit.)

Beispiel 10 **(Zeitdilatation) Sei $\underline{e}$ und $\underline{f}$ positiv orientierte zukunftsgerichtete Normalbasen von V. Welchen Wert hat $\tau' := U^0_{\underline{f}}(\tau e_0)$?*

Lösung: *Für ein $\beta \in (-1,1)$ gilt $\underline{f} := \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Nach dem Transformationsgesetz kontravarianter Koordinatenspalten bei Basiswechsel gilt*

$$U_{\underline{f}} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} U_{\underline{e}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} U_{\underline{e}}.$$

Daher gilt wegen $U_{\underline{e}}(\tau e_0) = (\tau, 0)^+$ und $\tau' := U^0_{\underline{f}}(\tau e_0)$ die Beziehung:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Beispiel 11 **(Lorentzkontraktion) Seien $\underline{e}$ und $\underline{f}$ positiv orientierte zukunftsgerichtete Normalbasen von V. Welchen Wert l' hat die kontravariante 1-Koordinate von le_1 bezüglich der Basis (e_0, f_1)? Lösung: Aus $f_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}[\beta e_0 + e_1]$ folgt durch Auflösen nach e_1 die Beziehung: $le_1 = l\left[-\beta e_0 + \sqrt{1-\beta^2} f_1\right]$, woraus*

$$l' = l\sqrt{1-\beta^2}$$

abzulesen ist.

Beispiel 12 **(Dopplereffekt) Seien $\underline{e}$ und $\underline{f}$ positiv orientierte zukunftsgerichtete Normalbasen von V. Welche Werte haben für ein festes $\frac{c}{\nu} > 0$ die kontravarianten Koordinatenfunktionen $U^0_{\underline{f}}$ an den Raumzeitpunkten in der Menge*

$$H_n := \left\{v_0 + n\frac{c}{\nu}e_0 + V_0^+\right\} \cap \{v_0 + \mathbb{R} \cdot f_0\} \quad für \quad n \in \mathbb{Z}$$

(Ein bezüglich e ruhender Partikel emittiert periodisch Lichtsignale. Die Frequenz der Emissionsereignisse ist ν. Die Zeitkoordinaten bezüglich der Basis $\underline{f}$ der (periodischen) Eintreffereignisse bei einem bezüglich f ruhenden Partikel ("Empfänger") sind zu ermitteln.)

Lösung: *Wegen $V_0^+ = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot (e_0 + e_1) + \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot (e_0 - e_1)$ für $\lambda_\pm \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und $\tau_\pm \in \mathbb{R}$ ist*

$$n\frac{c}{\nu}e_0 + \lambda_\pm(e_0 \pm e_1) = \tau_\pm f_0$$

die Bestimmungsgleichung für die Punkte in H_n. Einsetzen von

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(e_0 + \beta e_1)$$

ergibt die beiden (alternativen) Gleichungssysteme

$$\left(n\frac{c}{\nu} + \lambda_\pm - \frac{\tau_\pm}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)e_0 \pm \left(\lambda_\pm \mp \frac{\tau_\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)e_1 = 0$$

für die reellen Variablen $(\lambda_\pm, \tau_\pm)$. Die eindeutigen Lösungen dieser Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ sind:

$$\lambda_\pm(n) := \pm\frac{nc}{\nu}\frac{\beta}{1 \mp \beta}, \quad \tau_\pm(n) := \frac{nc}{\nu}\sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}.$$

Aus den Lösungen mit $\lambda_\pm \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ folgt für $n\beta \geqslant 0 : H_n = \{\tau_+(n)f_0\}$ und für $n\beta \leqslant 0 : H_n = \{\tau_-(n)f_0\}$. Für beliebiges β gilt somit:

$$H_n = \left\{\frac{nc}{\nu}\sqrt{\frac{1+\mid\beta\mid}{1-\mid\beta\mid}}f_0\right\} \quad für \quad n \geqslant 0$$

und

$$H_n = \left\{\frac{nc}{\nu}\sqrt{\frac{1-\mid\beta\mid}{1+\mid\beta\mid}}f_0\right\} \quad für \quad n \leqslant 0.$$

Zusammenfassend gilt mit der Definition $\nu'_\pm := \nu\sqrt{\frac{1\mp|\beta|}{1\pm|\beta|}}$ für die Menge der Empfangsraumzeitpunkte von Signalen beim Partikel $v_0 + \mathbb{R} \cdot f_0$:

$$(v_0 + \mathbb{Z}\frac{c}{\nu}e_0 + V_0^+) \cap (v_0 + \mathbb{R} \cdot f_0) = (\frac{c}{\nu'_+}\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cdot f_0) \cup (\frac{c}{\nu'_-}\mathbb{Z}_{\leqslant 0} \cdot f_0).$$

Die $\underline{f}$-Zeiten der Empfangsereignisse sind somit $(\frac{c}{\nu'_+}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \cup (\frac{c}{\nu'_-}\mathbb{Z}_{\leqslant 0})$. Solange sich der Empfänger auf den Sender zubewegt, treffen die Signale mit der Frequenz $\nu'_- \geqslant \nu$ bei ihm ein. Wenn er sich vom Sender entfernt, treffen die Signale mit der Frequenz $\nu'_+ \leqslant \nu$ ein.

Sei etwa $\nu = 10^{15}\,[Hz]$ die Frequenz eines roten Laserstrahls und $\beta = 10^{-7}$ die Geschwindigkeit/c eines Autos mit etwa $100\,[km/h]$, dann gilt: $\nu'_\mp \simeq \nu(1 \pm 10^{-7})$. Die Laserpistole muß also Frequenzverschiebungen im Bereich von $10^{-9}\nu$ feststellen können, wenn sie eine Geschwindigkeit von $100\,[km/h]$ mit einer Genauigkeit von 1% messen soll. Daß die Frequenz von periodischen elektromagnetischen Wellen sich wie im obigen Modell die Frequenz von periodischen elektromagnetischen Emissionsakten verhält, mag plausibel erscheinen, braucht aber eine hier nicht angeführte, schlüssigere Begründung.

1.6 Dreidimensionale Drehungen

In diesem Abschnitt bezeichnet V einen reellen VR mit $\dim(V) = 3$ und Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Die Basis $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ sei eine ON-Basis von V. Zur Erinnerung: Die Invarianzgruppe von $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist

$$O_3 = \{A : V \to V \mid \langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v, w \in V\},$$

und die Untergruppe der orientierungserhaltenden Invarianzen ist

$$SO_3 = \{A \in O_3 \mid \det(A) = 1\}.$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Elemente von O_3 werden abgeleitet, und die zwei in der Physik gebräuchlichsten Parametrisierungen werden vorgeführt. Winkelgeschwindigkeit wird als Tangente einer Kurve in SO_3 verstanden.

Satz 20 *(i) Jedes $A \in SO_3$ hat den Eigenwert 1. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, und bezeichnet $v^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathbb{R} \cdot v$, d. h. $v^\perp := \{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\}$, dann gilt $A \mid_{v^\perp} \in SO_2$. (A heißt "Drehung um $\mathbb{R} \cdot v$".)*

(ii) Jedes $A \in O_3 \setminus SO_3$ hat den Eigenwert -1 und $A \mid_{v^\perp} \in SO_2$. (A heißt "Drehspiegelung an der Spiegelebene $v^\perp$".)

Beweis: Das charakteristische Polynom von $A \in O_3$ hat den Grad 3 und somit mindestens eine Nullstelle $c \in \mathbb{R}$. Sei $A(v) = cv$, dann folgt aus $c^2 \langle v, v\rangle = \langle A(v), A(v)\rangle = \langle v, v\rangle$ wegen $\langle v, v\rangle > 0$ die Relation $c^2 = 1$. Weiter folgt für $w \in v^\perp$ aus $0 = \langle v, w\rangle = \langle A(v), A(w)\rangle = c\langle v, A(w)\rangle$ wegen $c \neq 0$, daß $A(w) \in v^\perp$, also $A(v^\perp) \subset v^\perp$ und daher $A \mid_{v^\perp} \in O_2$. Nun zu genaueren Fallunterscheidung:

(i, a) Sei $A \in SO_3$ und $c = 1$. Dann gilt wegen $1 = \det(A) = 1 \cdot \det(A \mid_{v^\perp})$ die Aussage $A \mid_{v^\perp} \in SO_2$.

(i, b) Sei $A \in SO_3$ und $c = -1$. Dann gilt wegen $1 = \det(A) = -1 \cdot \det(A \mid_{v^\perp})$ die Aussage $A \mid_{v^\perp} \in O_2 \setminus SO_2$. Nun hat jede 2d-Spiegelung die Eigenwerte 1 und -1. Daher hat auch A in $v^\perp$ einen Eigenraum zum Eigenwert 1, sodaß der Fall (i, a) vorliegt. Damit ist Teil (i) des Satzes bewiesen.

(ii, a) Sei $A \in O_3 \setminus SO_3$ und $c = 1$. Dann folgt wie unter (i): $A \mid_{v^\perp} \in O_2 \setminus SO_2$. Wegen $Spec(A \mid_{v^\perp}) = \{1, -1\}$, hat A in $v^\perp$ einen Eigenraum $\mathbb{R} \cdot w$ zum Eigenwert -1, sodaß $A \mid_{w^\perp} \in SO_2$ folgt, und die Aussage des Satzes gilt.

(ii, b) Sei $A \in O_3 \setminus SO_3$ und $c = -1$. Hier folgt $A \mid_{v^\perp} \in SO_2$ direkt. □

Bemerkung 26 *Jedes Element $A \in O_3 \setminus SO_3$ erfüllt $-A \in SO_3$, sodaß für eine Parametrisierung von O_3 eine solche von SO_3 ausreicht. Ist nämlich $\phi : X \to SO_3$ eine Parametrisierung von SO_3, dann ist $\Phi : \{1, -1\} \times X \to O_3$ mit $\Phi(\varepsilon, x) := \varepsilon\phi(x)$ eine Parametrisierung von O_3.*

Der folgende Satz zeigt, wie ein Element $A \in SO_3$ durch einen seiner Eigenvektoren zum Eigenwert 1 mit der Norm 1, er sei mit n bezeichnet, und durch den Drehwinkel von $A \mid_{n^\perp}$ausgedrückt werden kann. Das entsprechende Werkzeug enthalten die folgende Definition und das darauffolgende Lemma.

Definition 7 *Von den beiden Mengen gleichsinnig orientierter Basen von V sei eine als die positiv orientierte ausgezeichnet. Die Abbildung $\times : V \times V \to V$ bezeichne das zur Menge positiv orientierter Basen gehörige Vektorprodukt in V. (Siehe MPI, Kap. 8.6) Für $n \in V$ sei $L_n : V \to V$ durch $L_n(v) = n \times v$ definiert.*

Bemerkung 27 *Wegen der Bilinearität des Vektorproduktes gelten für alle $a, b \in V$ und für alle $c \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $L_a + L_b = L_{a+b}$ und $L_{ca} = cL_a$.*

Lemma 21 *Sei $n \in V$ mit $\langle n, n\rangle = 1$. Dann ist $e^{\theta L_n} = e^{L_{\theta n}} \in SO_3$ für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ und erfüllt für jedes $v \in V$*

$$e^{\theta L_n}(v) = n\langle n, v\rangle + \cos(\theta)\,(v - n\langle n, v\rangle) + \sin(\theta) n \times v. \tag{1.17}$$

Bemerkung 28 *Wegen $e^{\theta L_n}(n) = n$ ist $e^{\theta L_n} \mid_{n^\perp}$ eine zweidimensionale Drehung. Für $v \in n^\perp$ mit $\langle v, v\rangle = 1$ gilt: $e^{\theta L_n}(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)n \times v$. (Nach Definition des Vektorproduktes ist $(n, v, n \times v)$ eine positiv orientierte Orthonormal-Basis von V.) Wird $(v, n \times v)$ zu einer positiv orientierten Basis von $n^\perp$ erklärt, ist daher $e^{\theta L_n} \mid_{n^\perp}$ eine Drehung um den Winkel θ mit dem zur Orientierung von $n^\perp$ gehörigen Drehsinn. Zusammenfassung: $v \in V$ wird von $e^{\theta L_n}$ in Richtung $n \times v$ um den Winkel θ wegegdreht.*

Beweis des Lemmas: (1) Es gilt $L_n(n) = n \times n = 0$. (2) Für $v \in n^\perp$ gilt $L_n(v) = n \times v \in n^\perp$. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird die für alle $a, b, c \in V$ gültige Formel

$$a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$$

gezeigt. Daher gilt für $v \in n^\perp$ die Beziehung $L_n(L_n(v)) = n \times (n \times v) = -v$ und somit $L_n^2 \mid_{n^\perp} = -id \mid_{n^\perp}$. (3) Sei nun $v \in V$ beliebig. Dann ist $v = n \langle n, v\rangle + (v - n \langle n, v\rangle)$ eine Zerlegung von v in eine Komponente in $\mathbb{R} \cdot n$ und eine in $n^\perp$. Es folgt mit dieser Zerlegung aus (1) und (2) für alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\begin{aligned} L_n^{2i}(v) &= (-1)^i (v - n \langle n, v\rangle) \\ L_n^{2i+1}(v) &= (-1)^i L_n (v - n \langle n, v\rangle) = (-1)^i n \times v. \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Exponentialreihe zur Behauptung des Lemmas aufsummieren.

$$\begin{aligned} e^{\theta L_n}(v) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} L_n^i(v) \\ &= v + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{2i}}{(2i)!}(-1)^i (v - n \langle n, v\rangle) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i n \times v \\ &= n \langle n, v\rangle + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i}}{(2i)!}(-1)^i (v - n \langle n, v\rangle) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i n \times v \\ &= n \langle n, v\rangle + \cos(\theta) (v - n \langle n, v\rangle) + \sin(\theta) n \times v. \end{aligned}$$

□

Korollar 22 *Aus der Exponentialformel* (1.17) *ist für alle* $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ *und für alle* $n \in V$ *mit* $\langle n, n\rangle = 1$ *die Beziehung* $e^{\theta L_n} \circ e^{\phi L_n} = e^{(\theta+\phi)L_n}$ *nachzurechnen. Für beliebige* $x, y \in V$ *gilt jedoch im allgemeinen* $e^{L_x} \circ e^{l_y} \neq e^{L_x + L_y}$*.(!)*

Bemerkung 29 *Es gilt nach dem Beweis des Lemmas für eine (beliebig orientierte) Orthonormalbasis* $\underline{e}$ *von* V*:*

$$\begin{aligned} L_{e_1}^2 &: e_1 \mapsto 0, e_2 \mapsto -e_2, e_3 \mapsto -e_3, \\ L_{e_2}^2 &: e_1 \mapsto -e_1, e_2 \mapsto 0, e_3 \mapsto -e_3, \\ L_{e_2}^2 &: e_1 \mapsto -e_1, e_2 \mapsto -e_2, e_3 \mapsto 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition

$$L_{e_1}^2 + L_{e_2}^2 + L_{e_2}^2 : e_1 \mapsto -2e_1, e_2 \mapsto -2e_2, e_3 \mapsto -2e_3.$$

Also gilt

$$-\sum_{i=1}^{3} L_{e_i}^2 = 2 \cdot id_V.$$

Die komplexifizierte Version dieser Gleichung ist in der Quantentheorie eines Systems mit Drehimpuls 1 *bedeutsam.*

Der folgende Satz formuliert nun die Parametrisierung der dreidimensionalen Drehungen durch Drehachse und Drehwinkel.

Satz 23 *Sei* $S^2 := \{n \in V \mid \langle n, n\rangle = 1\}$ *(2-Sphäre). Die Abbildung* $\phi : S^2 \times [0, \pi] \to SO_3$ *mit* $\phi(n, \theta) := e^{\theta L_n}$ *ist surjektiv. Es gelten für alle* $n \in S^2$ *die Beziehungen:*

$$\phi(n, \pi) = \phi(-n, \pi), \phi(n, 0) = id_V. \tag{1.18}$$

Die Einschränkung von ϕ *auf* $S^2 \times (0, \pi)$ *ist injektiv.*

Beweis: Sei $A \in SO_3$. Dann existiert ein Eigenvektor n von A zum Eigenwert 1 mit $\langle n, n\rangle = 1$. Da $A \mid_{n^\perp} \in SO_2$ ist, existiert genau ein $\theta \in [0, 2\pi)$ sodaß $A \mid_{n^\perp}$ eine zweidimensionale Drehung mit Drehwinkel θ und jenem Drehsinn ist, der Vektoren $v \in n^\perp$ in Richtung $n \times v$ dreht. Für $\theta > \pi$ kann die Gleichung $e^{\theta L_n} = e^{(2\pi-\theta)L_{-n}}$ dazu benutzt werden, um durch Übergang von n auf $-n$ den Drehwinkel auf das Intervall $[0, \pi]$ zu beschränken. Da für $0 < \theta < \pi$ die zweidimensionale Drehung $A \mid_{n^\perp}$ keine Eigenwerte hat, besitzt auch A (in diesem Fall!) keinen von n linear unabhängigen Eigenvektor n' zum Eigenwert 1, der $A = e^{\theta' L_{n'}}$ für ein $\theta' \in \mathbb{R}$ erfüllt. Damit sind die Surjektivität von ϕ und die Bijektivität der Einschränkung von ϕ auf $S^2 \times (0, \pi)$ gezeigt. Die Gleichungen 1.18 folgen aus dem Lemma mit $L_{cn} = cL_n$ für $c \in \mathbb{R}$. (Sie geben den Mangel an Injektivität von ϕ an.) □

Beispiel 13 *An einem Ort auf* $45°$ *nördlicher Breite geht ein Stern bei* $45°$ *gegen Norden ("Azimut") am (flachen) Horizont auf. Welchen Azimut* α *und welche "Höhe (über dem Horizont)"* β *hat dieser Stern* 3 *Stunden später? (Als "Höhe (über dem Horizont)" eines Vektors* v*, der auf einen Himmelskörper gerichtet ist, wird der Winkel zwischen der Komponente von* v *in der Horizontalebene und der Komponente im Strahl durch Fußpunkt und Zenith bezeichnet.)*

Lösung: *Der Sternhimmel macht eine Drehbewegung um die Achse* $\mathbb{R} \cdot n$*, wobei* n *ein Einheitsvektor in Richtung Polarstern ist. An einem Ort von* $45°$ *nördlicher Breite hat* n *die Höhe von* $45°$ *und liegt in der Ebene, die vom Richtungsvektor in den Zenith,* e_3*, und dem horizontalen Richtungsvektor nach Norden,* e_2*, gebildet wird, d. h.* $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3)$*. Der Richtunsvektor* v *zum aufgehenden Stern liegt in der Horizontalebene und bildet mit* e_2 *den Winkel von* $45°$*. Die Einheitsvektoren* e_2 *und* e_3 *werden durch den nach Osten gerichteten horizontalen Vektor* e_1 *zu einer Orthonormalbasis des dreidimensionalen reellen Vektorraumes (mit euklidischem Skalarprodukt) der Verbindungsvektoren von der astronomischen Warte zum Sternenhimmel ergänzt. Sie wird als positiv orientiert deklariert. Es gilt also* $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$*. Die Drehbewegung des Firmaments um* $\mathbb{R} \cdot n$ *geschieht so, daß* e_1 *in Richtung* $-n \times e_1$ *gedreht wird. Der Drehwinkel ist proportional der verstrichenen Zeit und beträgt* $15°$ *pro Stunde. Der Richtungsvektor zum Stern ist also nach* 3 *Stunden der Vektor* $e^{-\theta L_n}(v)$ *mit* $\theta = 45°$*. Es gilt daher*

$$e^{-\theta L_n}(v) = n\,\langle n, v\rangle + \cos(\theta)\,(v - n\,\langle n, v\rangle) - \sin(\theta) n \times v.$$

Nebenrechnungen:

(1) $\langle n, v\rangle = \frac{1}{2}$*. (Wegen* $\parallel n \parallel = \parallel v \parallel = 1$ *ist der Winkel* γ *zwischen Polarstern und dem aufgehenden Stern, d. h.* $\cos(\gamma) := \langle n, v\rangle$*, durch* $\gamma = 60°$ *gegeben.*

(2) $n \times v = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3)$*.*

(3) $v - n\,\langle n, v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3)$

Damit folgt:

$$U_{\underline{e}} \circ e^{-\theta L_n}(v) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Kontrolle: $\left\langle n, e^{-\theta L_n}(v)\right\rangle = \langle n, v\rangle$*? (Invarianz) Es gilt:*

$$\left\langle n, e^{-\theta L_n}(v)\right\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Die Kontrolle ist also bestanden. Da alle drei Koordinaten $U^i_{\underline{e}}$ *positiv sind, gilt* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *und* $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$*. Der Wert des Azimuts ergibt sich somit aus*

$$\tan(\alpha) = \frac{U^1_{\underline{e}} \circ e^{-\theta L_n}(v)}{U^2_{\underline{e}} \circ e^{-\theta L_n}(v)} = \frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2},$$

zu $\alpha = 73,68°$*. Der Wert der Höhe ergibt sich aus*

$$\tan(\beta) = \frac{U^3_{\underline{e}} \circ e^{-\theta L_n}(v)}{\sqrt{(U^1_{\underline{e}} \circ e^{-\theta L_n}(v))^2 + (U^2_{\underline{e}} \circ e^{-\theta L_n}(v))^2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}$$

zu $\beta = 27,20°$*.*

Es wird nun die Frage untersucht, wie sich Drehachse $\mathbb{R} \cdot n$ und Drehwinkel θ einer Drehung unter einer weiteren Drehung oder Drehspiegelung $A \in O_3$ ändert. Präzise: Für gegebenes $n \in V$ mit $\langle n, n\rangle = 1$ und $\theta \in [0, \pi]$ wird jenes $n' \in V$ mit $\langle n', n'\rangle = 1$ und $\theta' \in [0, \pi]$ gesucht, das

$$A \circ e^{\theta L_n} \circ A^{-1} = e^{\theta' L_{n'}}$$

erfüllt. Die Existenz von n' und θ' ist wegen $A \circ e^{\theta L_n} \circ A^{-1} \in SO_3$ klar. Beispiele: Betonmischwagen am Nordpol, oder etwas nützlicher: Foucault'sches Pendel, Kreiselkompaß im Flugzeug. Da ist $e^{\theta L_n}$ z. B. die

90°-Drehung der Betonmischtrommel, die sie in etwa 10 Sekunden ausführt, und A ist die 15°-Drehung des Wagens um die Vertikale n innerhalb einer Stunde. (Die Wagendrehung wird für die Dauer von 10 Sekunden vernachlässigt.) Intuitiv ist zu erwarten: $\theta' = \theta$ und $n' = A(n)$. Dies sagt auch der folgende Satz.

Satz 24 *Für $A \in O_3$ und beliebiges $n \in V$ gilt $A \circ e^{L_n} \circ A^{-1} = e^{L_{\det(A)A(n)}}$.*

Bemerkung 30 **In Physiktexten wird dazu gesagt: die Einheitsvektoren orientierter Drehachsen "sind" Axialvektoren. Es ist folgendes gemeint: Die Abbildung*

$$P : O_3 \times V \to V, (A, v) \mapsto \det(A)A(v)$$

ist eine Linksopertion von O_3 auf V. Sie heißt "Axialvektoroperation" (vgl. Pseudoskalare Operation). Die Abbildung

$$\mu : O_3 \times SO_3 \to SO_3, (A, B) \mapsto A \circ B \circ A^{-1}$$

ist eine Linksoperation von O_3 auf SO_3. Die Abbildung $\Phi : V \to SO_3, n \mapsto e^{L_n}$ ist eine sogenannte Äquivarianz bezüglich der Operationen P und μ, d. h. es gilt für alle $A \in O_3$ und $v \in V$

$$\Phi \circ P(A, v) = \mu(A, \Phi(v)).$$

Die Redeweise, daß ein Vektor $v \in V$ ein Axialvektor "sei", ist insoferne unsinnig, als ein und der selbe Vektor sowohl der "Vektoroperation" $(A, v) \mapsto A(v)$ unterworfen werden kann, als auch der Axialvektoroperation P.

Beweis des Satzes: Für $n \in V$ mit $\langle n, n\rangle = 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} A \circ e^{\theta L_n}(v) &= A(n)\langle n, v\rangle + \cos(\theta)\left(A(v) - A(n)\langle n, v\rangle\right) + \sin(\theta)A(n \times v) \\ &= A(n)\langle A(n), A(v)\rangle \\ &\quad + \cos(\theta)\left(A(v) - A(n)\langle A(n), A(v)\rangle\right) + \sin(\theta)A(n \times v). \end{aligned}$$

Nun gilt das folgende Lemma der O_3-Äquvarianz äußerer Produkte.

Lemma 25 *Für $A \in O_3$ und $a, b \in V$ gilt $A(a \times b) = \det(A)\,(A(a) \times A(b))$.*

Der Beweis des Lemmas wird zurückgestellt. Mithilfe des Lemmas folgt

$$\begin{aligned} A \circ e^{\theta L_n}(v) &= A(n)\langle A(n), A(v)\rangle \\ &\quad + \cos(\theta)\left(A(v) - A(n)\langle A(n), A(v)\rangle\right) \\ &\quad + \sin(\theta)\det(A)\,(A(n) \times A(v)) \\ &= \det(A)A(n)\langle \det(A)A(n), A(v)\rangle \\ &\quad + \cos(\theta)\left(A(v) - \det(A)A(n)\langle \det(A)A(n), A(v)\rangle\right) \\ &\quad + \sin(\theta)\left(\det(A)A(n) \times A(v)\right) \\ &= e^{\theta L_{\det(A)A(n)}}(A(v)) \end{aligned}$$

sodaß die Behauptung bewiesen ist. □

Nun zum Beweis des Lemmas: Es gilt

$$\begin{aligned} \langle A(a \times b), A(a)\rangle &= \langle a \times b, a\rangle = 0, \\ \langle A(a \times b), A(b)\rangle &= \langle a \times b, b\rangle = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $A(a \times b) \in \mathbb{R} \cdot (A(a) \times A(b))$ gezeigt. Sei nun (o.E.d.A.!) $a \times b \neq 0$. Dann gilt mit $\cos(\theta_{(a,b)}) = \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\|b\|}$ (vgl MPI, Kap. 8.6, Satz 1)

$$\begin{aligned} \langle A(a \times b), A(a \times b)\rangle &= \langle a \times b, a \times b\rangle = \| a \|^2 \| b \|^2 \sin^2(\theta_{(a,b)}) \\ &= \| A(a) \|^2 \| A(b) \|^2 \sin^2(\theta_{(A(a),A(b))}) \\ &= \langle A(a) \times A(b), A(a) \times A(b)\rangle . \end{aligned}$$

Damit ist

$$A(a \times b) \in \{A(a) \times A(b), -(A(a) \times A(b))\}$$

gezeigt. Für $A \in SO_3$ ist $(A(a), A(b), A(a \times b))$ gleich wie $(a, b, a \times b)$, also positiv orientiert. Ebenso ist $(A(a), A(b), A(a) \times A(b))$ positiv und $(A(a), A(b), -(A(a) \times A(b)))$ist negativ orientiert. Also gilt $A(a \times b) = A(a) \times A(b)$. Damit ist aber für $A \in SO_3$ die Behauptung gezeigt. Für $A \in O_3 \setminus SO_3$ gilt $A = -B$ mit $B \in SO_3$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A(a) \times A(b) &= B(a) \times B(b) = B(a \times b) \\ &= -A(a \times b) = \det(A) A(a \times b). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Bemerkung 31 *Das Lemma hat vielfältige Anwendung in der Physik. So wirkt z. B. ein Magnetfeld B auf eine Ladung der Stärke q und der Geschwindigkeit v mit der Kraft $F(v, B) = qv \times B$ ein. Werden Teilchenquelle und Magnet mit derselben Drehung A transportiert, so liegt in der gedrehten Situation die mit A gedrehte Kraft $A(F)$ vor. Man sagt, das Gesetz $F(v, B) = qv \times B$ ist "drehinvariant", womit die Äquivarianz $F(A(v), A(B)) = A(F(v, B))$ gemeint ist.*

Satz 26 *Sei $\underline{e}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Dann gilt für $n = n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3$*

$$M(L_n, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -n^3 & n^2 \\ n^3 & 0 & -n^1 \\ -n^2 & n^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (L_n(e_1), L_n(e_2), L_n(e_3)) &= (n \times e_1, n \times e_2, n \times e_3) \\ &= (e_1, e_2, e_3) \cdot M(L_n, \underline{e}). \end{aligned}$$

Daraus ist dann die angeführte Matrix $M(L_n, \underline{e})$ abzulesen. □

Bemerkung 32 *Die Drehgeneratoren L_{e_i} haben die Matritzen $M(L_{e_i}, \underline{e})$:*

$$\begin{aligned} M(L_{e_1}, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ M(L_{e_2}, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M(L_{e_3}, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Skizze der Drehvektorfelder!

Bemerkung 33 *Die Drehungen $e^{\theta L_{e_i}}$ haben die Matritzen $M(e^{\theta L_{e_i}}, \underline{e})$.*

$$\begin{aligned} M(e^{\theta L_{e_1}}, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \\ M(e^{\theta L_{e_2}}, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \\ M(e^{\theta L_{e_3}}, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Beweis geht über Spezialisierung der allgemeinen Exponentialformel (1.17).

Der folgende Satz gibt eine weitere bedeutungsvolle Eigenschaft der Drehgeneratoren an, die in der Quantentheorie als Drehimpuls"algebra" bezeichnet wird.

Satz 27 *Für alle $n, m \in V$ gilt:* $[L_n, L_m] := L_n \circ L_m - L_m \circ L_n = L_{n \times m}$.

Beweis: Es gilt

$$(L_n \circ L_m - L_m \circ L_n)(v) = n \times (m \times v) - m \times (n \times v).$$

Dreifache Vektorprodukte erfüllen die folgende Formel.

Lemma 28 *Für alle $a, b, c \in V$ gilt* $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$.

Aufgrund dieses Lemmas gilt somit

$$\begin{aligned} [L_n, L_m](v) &= m \langle n, v \rangle - v \langle n, m \rangle - n \langle m, v \rangle + v \langle m, n \rangle \\ &= m \langle n, v \rangle - n \langle m, v \rangle \\ &= v \times (m \times n) = (n \times m) \times v. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Beweis des Lemmas: Linke und rechte Seite der behaupteten Gleichung sind trilinear. Daher genügt es die Gleichung für $a, b, c \in \{e_1, e_2, e_3\}$ zu beweisen. Da linke und rechte Seite schief unter Vertauschung von b und c sind, genügt es die Fälle $a = e_k, b = e_i, c = e_j$ mit $i > j$ zu kontrollieren. □

Bemerkung 34 *Die Menge der Drehgeneratoren ist versehen mit der Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen ein dreidimensionaler reeller Vektorraum, auf dem zusätzlich die bilineare, alternierende Multiplikation $[\cdot, \cdot]$ (Lieklammer) erklärt ist. Diese Struktur heißt Liealgebra der SO_3. Wie Satz* (26) *zeigt, sind die Matritzen von Drehgeneratoren bezüglich einer ON-Basis $\underline{e}$ schiefsymmetrisch, d. h. es gilt $M(L_n, \underline{e})^+ = -M(L_n, \underline{e})$. Dies ist äquivalent zur basisfreien Relation $\langle v, L_n(w) \rangle = -\langle L_n(v), w \rangle$, die für alle $v, w, n \in V$ gilt. (Vgl. auch mit der Spatproduktformel im Abschnitt über metrische Volumina.) Umgekehrt existiert auch zu jeder linearen Abbildung $L : V \to V$, die für alle $v, w \in V$ die Gleichung $\langle v, L(w) \rangle = -\langle L(v), w \rangle$ erfüllt, ein Vektor $n \in V$ mit $L = L_n$. Dieser Sachverhalt ermöglicht die folgende Definition eines Winkelgeschwindigkeitsvektors.*

Satz 29 *Sei I ein offenes, reelles Intervall und $\gamma : I \to SO_3$ diffbar. Dann gilt für jedes $t \in I$ für die Tangente der Kurve γ an der Stelle $\gamma(t)$, nämlich $\dot{\gamma}(t) := (d_t \gamma)(1)$, die eine lineare Abbildung von V nach V ist, die Beziehung:*

$$\dot{\gamma}(t) = L_{\omega(t)} \circ \gamma(t) \tag{1.19}$$

mit eindeutig bestimmtem Vektor $\omega(t) \in V$. (Dieser Vektor heißt Winkelgeschwindigkeitsvektor der Kurve γ beim Parameterwert t.)

Beweisskizze: Sei $v, w \in V$ und $f : I \to V \times V, t \mapsto (\gamma(t)(v), \gamma(t)(w))$. Weiter sei $g := \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \langle a, b \rangle$. Dann ist die Abbildung $g \circ f$ konstant, und somit $d_t(g \circ f) = 0$. Gemäß Kettenregel gilt $d_t(g \circ f) = d_{f(t)} g \circ d_t f$. Aus $(d_{(x,y)} g)(a, b) = \langle x, b \rangle + \langle a, y \rangle$ und $d_t f(h) = (h\dot{\gamma}(t)(v), h\dot{\gamma}(t)(w))$ folgt

$$\begin{aligned} d_t(g \circ f)(1) &= \langle \gamma(t)(v), \dot{\gamma}(t)(w) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t)(v), \gamma(t)(w) \rangle \\ &= \left\langle v, \gamma(t)^{-1} \circ \dot{\gamma}(t)(w) \right\rangle + \left\langle \gamma(t)^{-1} \circ \dot{\gamma}(t)(v), w \right\rangle. \end{aligned}$$

Also ist die lineare Abbildung $\gamma(t)^{-1} \circ \dot{\gamma}(t)$ schiefsymmetrisch und es existiert ein $\omega'(t)$ mit $\gamma(t)^{-1} \dot{\gamma}(t) = L_{\omega'(t)}$. Nun gilt

$$\gamma(t) \circ L_{\omega'(t)} \circ \gamma(t)^{-1} = L_{\gamma(t)(\omega'(t))},$$

sodaß mit $\omega(t) := \gamma(t)(\omega'(t))$ wegen

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t) \circ L_{\omega'(t)} = L_{\gamma(t)(\omega'(t))} \circ \gamma(t) = L_{\omega(t)} \circ \gamma(t)$$

die Behauptung folgt. □

Beispiel 14 *Sei $\gamma : \mathbb{R} \to SO_3, t \mapsto e^{tL_x}$ für ein $x \in V$. ($\gamma(t)$ ist also eine Drehung um $\mathbb{R} \cdot x$ mit dem (x-orientierten) Drehwinkel $t \parallel x \parallel$.) Dann ist aus Korollar (22) ersichtlich, daß*

$$\begin{aligned} \gamma(t+\varepsilon) &= \gamma(\varepsilon) \circ \gamma(t) = (1 + \varepsilon L_x + \rho(\varepsilon)) \circ \gamma(t) \\ &= \gamma(t) + \varepsilon L_x \circ \gamma(t) + \rho(\varepsilon) \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

gilt, wobei die Funktion ρ die Bedingung $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ erfüllt. Damit ist aber $(d_t\gamma)(\varepsilon) = \varepsilon L_x \circ \gamma(t)$ gezeigt. Der Wingelgeschwindigkeitsvektor von γ bei t ist somit x. Der Betrag von x gibt die Zunahme des (in t linearen) Drehwinkels um die Achse $\mathbb{R} \cdot x$ pro Zeiteinheit an. Achtung: Die Konstanz des Winkelgeschwindigkeitsvektors in t ist der einfachste Fall, aber nicht allgemein gültig.

Der folgende Satz gibt die in der Mechanik benützte basisbezogene "Eulerparametrisierung" von SO_3 an.

Satz 30 *Sei $\underline{e}$ eine positiv orienteirte ON-Basis von V und $A \in SO_3$. Dann existiert genau ein Tripel $(\phi, \theta, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ mit*

$$A = e^{\phi L_{e_3}} \circ e^{\theta L_{e_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}},$$

und es gilt dann mit $e_1' := e^{\phi L_{e_3}}(e_1), e_3' := e^{\theta L_{e_1'}}(e_3)$ auch

$$A = e^{\psi L_{e_3'}} \circ e^{\theta L_{e_1'}} \circ e^{\phi L_{e_3}}.$$

Beweis: Sei $v := A^{-1}(e_3)$. Dann existiert genau ein $(\theta, \psi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ mit $e^{\theta L_{e_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}}(v) = e_3$. Also ist e_3 Eigenvektor von $e^{\theta L_{e_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}} \circ A^{-1}$ zum Eigenwert 1. Daher existiert genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $e^{\theta L_{e_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}} \circ A^{-1} = (e^{\phi L_{e_1}})^{-1}$. Damit folgt die Behauptung. Die zweite Formel für A folgt aus der O_3-Transformationsformel von Satz (24) für Drehungen.

$$\begin{aligned} A &= e^{\phi L_{e_3}} \circ e^{\theta L_{e_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}} = e^{\theta L_{e'_1}} \circ e^{\phi L_{e_3}} \circ e^{\psi L_{e_3}} \\ &= e^{\theta L_{e'_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}} \circ e^{\phi L_{e_3}} = e^{\psi L_{e'_3}} \circ e^{\theta L_{e'_1}} \circ e^{\phi L_{e_3}}. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 35 *Die Matrix von $E(\phi, \theta, \psi) := e^{\phi L_{e_3}} \circ e^{\theta L_{e_1}} \circ e^{\psi L_{e_3}}$ bezüglich $\underline{e}$ ist mit $s_\phi := \sin(\phi), c_\psi := \cos(\psi), ..$*

$$M(E(\phi, \theta, \psi), \underline{e}) = \begin{pmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi c_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi - s_\phi c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\psi + c_\phi c_\theta s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\theta c_\psi & -c_\phi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi & c_\theta \end{pmatrix}$$

Der Beweis erfolgt durch Ausführung der Matrixmultiplikationen

$$M(E(\phi, \theta, \psi), \underline{e}) = M(e^{\phi L_{e_3}}, \underline{e}) \cdot M(e^{\theta L_{e_1}}, \underline{e}) \cdot M(e^{\psi L_{e_3}}, \underline{e}).$$

Bemerkung 36 *Eine Abbildung $\chi : I \to [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, mit $I \subset R$ offenes Intervall, sei diffbar. Dann ist auch die Abbildung $\gamma : I \to SO_3, t \mapsto E(\chi(t))$ diffbar. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\omega(t)$ von γ bei t erfüllt*

$$\omega(t) = \dot{\phi}(t) e_3 + \dot{\theta}(t) (\cos(\phi(t)) e_1 + \sin(\phi(t)) e_2) + \dot{\psi}(t) \gamma(t)(e_3),$$

wobei $\dot{\phi}(t) := (d_t \phi)(1)$ etc. bedeutet. Die kontravarianten Koordinaten von $\omega(t)$ bezüglich der mitgedrehten ("körperfesten") Basis $\underline{e}'(t) := \underline{e} \cdot M(\gamma(t), \underline{e})$ ergeben sich mit einer etwas längeren Rechnung zu

$$U_{\underline{e}'(t)}(\omega(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}(t) \sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)) + \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) \\ \dot{\phi}(t) \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)) - \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) \\ \dot{\phi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}.$$

1.7 Metrisches Volumen

In diesem Abschnitt bezeichnet V einen n-dimensionalen K-VR mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es wird der Begriff des metrischen Volumens von Parallelotopen erläutert. Dieser Begriff gibt den Schlüssel für die Konzeption des Volumens von komplizierter gestalteten Mengen ab. Die Berechnung des Volumens von Parallelotopen führt, ob man es liebt oder nicht, auf alternierende Multilinearformen. Diese sind der "lineare" Baustein zur Bildung von Funktionen, die einem höherdimensionalen Gebiet in einem Vektorraum (und allgemeiner auch in einer "krummen Mannigfaltigkeit") Zahlen zuordnen. Ihre Behandlung wird in einem folgenden Kapitel aufgenommen und vertieft.

Definition 8 *Sei $\underline{v} = (v_1, ..., v_m) \in V^m$ eine Folge von Vektoren ($m \leqslant n$). Die Menge $\Delta(v_1, .., v_m) = [0, 1] \cdot v_1 + ... + [0, 1] \cdot v_m$ heißt das von $\underline{v}$ erzeugte Parallelotop. Das metrische (m-dimensionale) Volumen von $\Delta(v_1, ..v_m)$ wird durch*

$$Vol(\Delta(v_1, .., v_m)) = \sqrt{|\det \widetilde{G}_{\underline{v}}|} \tag{1.20}$$

definiert, wobei die Matrix $\widetilde{G}_{\underline{v}} \in M(m, m, K)$ durch $\left(\widetilde{G}_{\underline{v}}\right)_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$ erklärt ist.

Bemerkung 37 *Für $n = m$ und linear unabhängige $v_1, ..., v_m$ ist $\widetilde{G}_{\underline{v}} = G_{\underline{v}}$ die metrische Matrix der Basis $\underline{v}$. Für $m < n$ ist hingegen $\widetilde{G}_{\underline{v}}$ auch für linear unabhängige $v_1, ..., v_m$ nicht notwendig eine metrische Matrix. Ist in diesem Fall das innere Produkt ein Skalarprodukt, dann ist jedoch auch die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\underline{v} \cdot K^m \times \underline{v} \cdot K^m$ ein Skalarprodukt und $\widetilde{G}_{\underline{v}}$ somit eine metrische Matrix. ($\underline{v} \cdot K^m$ bezeichnet die K-lineare Hülle der Menge $\{v_1, ..., v_m\}$.)*

Bemerkung 38 *Sei $\underline{v} = (v_1, ..., v_m) \in V^m$ eine Folge von Vektoren. Für $A \in Inv(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt*

$$Vol(\Delta(A(v_1), .., A(v_m))) = Vol(\Delta(v_1, .., v_m)).$$

(Bsp.: Die euklidischen Volumina zweier auseinander durch Drehung hervorgehender Quader stimmen überein.)

Der folgende Satz gibt eine Formel, die zur Berechnung des basisfrei definierten Volumens aus den basisabhängigen kontravarianten Koordinaten der das Parallelotop erzeugenden Vektoren dient.

Satz 31 *Sei $\underline{v} = (v_1, ..., v_m) \in V^m$ eine Folge von Vektoren. Sei $(e_1, .., e_m)$ eine Basis eines UVRs von V, der die Vektoren $v_1, ..., v_m$ enthält. (Im Fall linear unabhängiger $v_1, ..., v_m$ ist dies der Raum $\underline{v} \cdot K^m$.) Dann gilt*

$$Vol(\Delta(v_1, .., v_m)) = \sqrt{|\det \widetilde{G}_{\underline{e}}|} \cdot |\det \left(\begin{array}{ccc} U_{\underline{e}}(v_1), & ..., & U_{\underline{e}}(v_m) \end{array} \right)|.$$

Bemerkung 39 *Der Satz zeigt: $Vol(\Delta(v_1, .., v_m)) = 0$, falls die Vektoren $v_1, ..., v_m$ linear abhängig sind.*

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{\underline{v}} &= \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle, & .., & \langle v_1, v_m \rangle \\ .. & & .. \\ \langle v_m, v_1 \rangle, & .., & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_{\underline{e}}(v_1)^+ \cdot \widetilde{G}_{\underline{e}} \cdot U_{\underline{e}}(v_1), & .., & U_{\underline{e}}(v_1)^+ \cdot \widetilde{G}_{\underline{e}} \cdot U_{\underline{e}}(v_m) \\ .. & & .. \\ U_{\underline{e}}(v_m)^+ \cdot \widetilde{G}_{\underline{e}} \cdot U_{\underline{e}}(v_1), & .., & U_{\underline{e}}(v_m)^+ \cdot \widetilde{G}_{\underline{e}} \cdot U_{\underline{e}}(v_m) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{ccc} U_{\underline{e}}(v_1), & .., & U_{\underline{e}}(v_m) \end{array} \right)^+ \cdot \widetilde{G}_{\underline{e}} \cdot \left(\begin{array}{ccc} U_{\underline{e}}(v_1), & .., & U_{\underline{e}}(v_m) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} Vol(\Delta(v_1, .., v_m))^2 &= |\det \widetilde{G}_{\underline{v}}| \\ &= \det(\widetilde{G}_{\underline{e}}) \, |\det \left(\begin{array}{ccc} U_{\underline{e}}(v_1), & .., & U_{\underline{e}}(v_m) \end{array} \right)|^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Der folgende Satz stellt klar, daß das metrische Volumen im Fall eines Skalarproduktes mit dem elementargeometrischen Volumen übereinstimmt.

Satz 32 *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Sakalarprodukt von V. Die Vektoren $v_1, ...v_m \in V$ seien linear unabhängig. Die Vektoren*

$$x_1 := v_1, \quad x_2 := v_2 - \frac{x_1 \langle x_1, v_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle}, \quad ... \quad x_m := v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{x_i \langle x_i, v_m \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle}$$

bilden dann eine durch das Gram-Schmidt Verfahren zugeordnete Orthogonalbasis $\underline{x}$ von $\underline{v} \cdot K^m$ und es gilt mit $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$$Vol(\Delta(v_1, .., v_m)) = \prod_{i=1}^{m} \|x_i\|. \tag{1.21}$$

Beweis: Berechne nach Satz 2 $Vol(\Delta(v_1, .., v_m))$ unter Benützung der Basis $\underline{x}$. Da die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc} U_{\underline{x}}(v_1), & ..., & U_{\underline{x}}(v_m) \end{array} \right)$$

obere Dreiecksgestalt hat, und alle Diagonalelemente gleich 1 sind, folgt

$$Vol(\Delta(v_1, .., v_m)) = \sqrt{\det \widetilde{G}_{\underline{x}}}.$$

Da die Matrix $\widetilde{G}_{\underline{x}}$ gemäß Gram-Schmidtkonstruktion diagonal ist, folgt die Behauptung. □

Beispiel 15 *Sei V ein zweidimensionaler reeller VR. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ein Skalarprodukt. Seien $v_1, v_2 \in V \setminus 0$. Dann gilt für das metrische Volumen*

$$(Vol(\Delta(v_1,v_2)))^2 = \mid \det \begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{pmatrix} \mid = \|v_1\|^2\|v_2\|^2 \sin^2(\theta)$$

mit $\langle v_1,v_2\rangle =: \|v_1\|\|v_2\|\cos(\theta)$ und $0 \le \theta \le \pi$. Dies ist eine elementare Formel für die Fläche eines Parallelogramms. Nun noch etwas expliziter für beliebige $v_1, v_2 \in V$. Ist $\underline{e} = (e_1, e_2)$ eine ON-Basis von V und gilt $v_1 = ae_1 + be_2, v_2 = xe_1 + ye_2$, dann folgt nach Satz 2

$$Vol(\Delta(v_1,v_2)) = \mid \det \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \mid = \mid ay - bx \mid .$$

Andererseits ist nach Formel (1.20)

$$\begin{aligned} (Vol(\Delta(v_1,v_2)))^2 &= \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \langle v_1,v_2\rangle^2 \\ &= (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 \\ &= (ay-bx)^2. \end{aligned}$$

Somit führen beide Formeln zum selben Ergebnis. Das Volumen von $\Delta(v_1)$, die "Länge" von v, ist durch

$$\|v_1\| = \sqrt{\mid \langle v_1,v_1\rangle \mid} = \sqrt{\mid a^2+b^2 \mid}$$

gegeben. Es gilt $\|v_1\| = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$.

Beispiel 16 *Sei $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein zweidimensionaler Minkowskischer Vektorraum. Sei $\underline{e} = (e_0, e_1)$ eine N-Basis von V. Für die Vektoren $v_1 = ae_1 + be_2, v_2 = xe_1 + ye_2$ folgt nach Satz 2 wieder*

$$Vol(\Delta(v_1,v_2)) = \mid \det \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \mid = \mid ay - bx \mid .$$

Die elementargeometrische Flächeninterpretation über Gram-Schmidt trifft jedoch nicht zu, wie das Beispiel $v_1 = e_0 + e_1, v_2 = e_0 - e_1$ zeigt:

$$\widetilde{G}_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Die zum eulidischen analoge Konzeption eines loretzinvarianten Winkels zwischen zwei beliebigen Vektoren ist nicht möglich, da die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung eines Skalarproduktes nicht gilt.) Das Volumen von $\Delta(v)$ ist für $v \in V$ durch $\sqrt{\mid \langle v,v\rangle \mid} = \sqrt{\mid a^2-b^2 \mid}$ gegeben. Es gilt: $Vol(\Delta(v)) = 0 \Leftrightarrow v \in V_0$ (Lichtkegel). Für einen zeitartigen Vektor v gilt $Vol(\Delta(v)) = \mid U^0_{\underline{e}}(v) \mid$, wenn $\underline{e}$ das "Ruhsystem" des Vektors v ist, d.h. es gilt $v = U^0_{\underline{e}}(v)e_0$. Die basisunabhängige (oder im Jargon der Physik "absolute") Größe $Vol(\Delta(v))$ heißt "Eigenzeit" oder "Dauer im Ruhsystem" von v. Für einen raumartigen Vektor v gilt $Vol(\Delta(v)) = \mid U^1_{\underline{e}}(v) \mid$, wenn $\underline{e}$ das "Ruhsystem" des Vektors v ist, d.h. es gilt $v = U^1_{\underline{e}}(v)e_0$, und die "absolute" Größe $Vol(\Delta(v))$ heißt dann "Ruhlänge" von v.

Beispiel 17 *Sei V ein orientierter reeller dreidimensionaler VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ sei eine ON-Basis von V. Das zur Orientierung von V gehörige Vektorprodukt zweier Vektoren $v_1, v_2 \in V$ wird mit $v_1 \times v_2$ bezeichnet. (Siehe MPI, Kap. 8.6) Das Skalarprodukt zweier Vektorprodukte erfüllt dann die folgende für alle $a, b, u, v \in V$ gültige Formel*

$$\langle a \times b, u \times v\rangle = \langle a,u\rangle\langle b,v\rangle - \langle a,v\rangle\langle b,u\rangle . \tag{1.22}$$

Beweis: *Die Abbildung $f : V \times V \times V \times V \to V, (a,b,u,v) \mapsto \langle a \times b, u \times v\rangle$ ist in allen vier Argumenten linear ("multilinear") und sie erfüllt wegen $a \times b = -(b \times a)$ die Relationen*

$$f(a,b,u,v) = -f(b,a,u,v), \quad f(a,b,u,v) = -f(a,b,v,u).$$

Dasselbe gilt für die Funktion $g : V \times V \times V \times V \to V, (a,b,u,v) \mapsto \langle a,u\rangle\langle b,v\rangle - \langle a,v\rangle\langle b,u\rangle$. Daher genügt es, die Formel $f = g$ für die Fälle $a = e_i, b = e_j, u = e_k, v = e_l$ mit $i < j, k < l$ zu zeigen. In diesem Fall

gilt für $(i,j) \neq (k,l)$, daß f und g den Wert 0 annehmen, während für $(i,j) = (k,l)$ sowohl f als auch g den Wert 1 annimmt. Damit ist Formel (1.22) bewiesen. □

Mithilfe von Formel (1.22) läßt sich das Volumen eines Parallelogramms umformen:

$$\begin{aligned} Vol(\Delta(v_1,v_2)) &= \sqrt{\langle v_1,v_1\rangle \langle v_2,v_2\rangle - \langle v_1,v_2\rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle v_1 \times v_2, v_1 \times v_2\rangle} = \|v_1 \times v_2\| \\ &= Vol(\Delta(v_1 \times v_2)). \end{aligned}$$

Seien nun $v_1, v_2, v_3 \in V$. Dann gilt die "Spatproduktformel"

$$\langle v_1 \times v_2, v_3\rangle = or(\underline{e}) \cdot \det\left(U_{\underline{e}}(v_1), \quad U_{\underline{e}}(v_2), \quad U_{\underline{e}}(v_3) \right). \tag{1.23}$$

Hier ist $or(\underline{e}) := 1$ für eine positiv und $or(\underline{e}) := -1$ für eine negativ orientierte Basis $\underline{e}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle v_1 \times v_2, v_3\rangle &= \sum_{i=1}^{3} U^i_{\underline{e}}(v_1 \times v_2) U^i_{\underline{e}}(v_3) \\ &= or(\underline{e}) \left\{ \begin{array}{l} \left(U^2_{\underline{e}}(v_1) U^3_{\underline{e}}(v_2) - U^3_{\underline{e}}(v_1) U^2_{\underline{e}}(v_2) \right) U^1_{\underline{e}}(v_3) \\ + \left(U^3_{\underline{e}}(v_1) U^1_{\underline{e}}(v_2) - U^1_{\underline{e}}(v_1) U^3_{\underline{e}}(v_2) \right) U^2_{\underline{e}}(v_3) \\ + \left(U^1_{\underline{e}}(v_1) U^2_{\underline{e}}(v_2) - U^2_{\underline{e}}(v_1) U^1_{\underline{e}}(v_2) \right) U^3_{\underline{e}}(v_3) \end{array} \right\} \\ &= or(\underline{e}) \cdot \det\left(U_{\underline{e}}(v_1), \quad U_{\underline{e}}(v_2), \quad U_{\underline{e}}(v_3) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte. □

Für das Volumen von $\Delta(v_1,v_2,v_3)$ folgt somit, da $\underline{e}$ eine ON-Basis ist

$$Vol(\Delta(v_1,v_2,v_3)) = \mid \langle v_1 \times v_2, v_3\rangle \mid . \tag{1.24}$$

Man beachte $\langle v_1 \times v_2, v_3\rangle =: \|v_1 \times v_2\| \|v_3\| \cos(\theta)$. Daher gilt Volumen ist Grundfläche mal Höhe:

$$Vol(\Delta(v_1,v_2,v_3)) = Vol(\Delta(v_1,v_2)) Vol(\Delta(v_1)) \mid \cos(\theta) \mid .$$

1.8 Linearformen auf V

Aus der Vorlesung MPI, Kap. 3.3 Satz 2 ist bekannt, daß für zwei K-Vektorräume V und W die Menge der K-linearen Abbildungen von V nach W, sie wird mit $Hom_K(V,W)$ bezeichnet, ein Untervektorraum des K-VR's $Abb(V,W)$ ist. In diesem Abbschnitt wird der Spezialfall $Hom_K(V,K)$ zu endlichdimensionalem V genauer behandelt. Der Raum $Hom_K(V,K)$ wird als Raum der Linearformen auf V bezeichnet und mit V^* abgekürzt. Ein Beispiel für eine Linearform ist die Funktion, die jedem möglichen Verschiebungsvektor eines Objektes in einem homogenen Karftfeld die für die jeweilige Verschiebung benötigte Energie zuordnet.

Satz 33 *Sei V ein K-VR. Weiter sei $\underline{e} = (e_1, ...e_n)$ eine Basis von V. Dann bilden die kontravarianten Koordinatenfunktionen $(U^1_{\underline{e}}, ..., U^n_{\underline{e}})$ eine Basis von V^*. (Sie heißt die zu $\underline{e}$ duale Basis.) Es gilt mit der Abkürzung $E^i = U^i_{\underline{e}}$ für jedes $X \in V^*$*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(e_i) E^i. \tag{1.25}$$

Beweis: Für jedes $v \in V$ gilt $X(v) = X(\underline{e} \cdot U_{\underline{e}}(v)) = X(\underline{e}) \cdot U_{\underline{e}}(v) = \sum_{i=1}^n X(e_i) E^i(v)$. Damit ist jede Linearform X eine Linearkombination der Linearformen $E^1, ..E^n$. Die Linearformen $E^1, ..E^n$ sind linear unabhängig, denn aus der für alle $v \in V$ gültigen Bedingung für eine Linearkombination $\sum_{i=1}^n X_i E^i$ mit $X_i \in K$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i E^i(v) = 0$$

folgt $0 = \sum_{i=1}^n X_i E^i(e_j) = \sum_{i=1}^n X_i \delta^i_j = X_j$ für alle $j \in \{1,2,..n\}$. □

Beispiel 18 *Der atmosphärische Luftdruck p hängt von der Temperatur T der Säule und der Höhe x über Grund in der folgenden Weise ab*

$$p(x,T) = p_0 e^{-\frac{cx}{T}}.$$

Hier ist $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Das Differential dieser Funktion an der Stelle $(x,T) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ nimmt auf $(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2$ den Wert

$$\left(d_{(x,T)}p\right)(\xi,\tau) = p(x,T) \cdot \frac{c}{T} \cdot \left(-\xi + x\frac{\tau}{T}\right) \tag{1.26}$$

an. Die Tangentialapproximation von p an der Stelle (x,T) wird also von der Linearform $d_{(x,T)}p \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ bestimmt.

Beispiel 19 *Sei V der dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR der möglichen Ortsverschiebungen einer Ladung der Stärke q aus einer ausgezeichneten Lage und sei $\underline{e} = (e_1,..e_3)$ eine Basis von V. Die Arbeiten, die aufzuwenden sind, um diese Ladung von ihrem Ort 0 um die (nicht zu großen!) Strecken $e_1,..e_2$ (in einem großräumig homogenen) elektrischen Feld zu verschieben, seien mit drei Messungen zu $W(e_1),..W(e_3)$ bestimmt worden. Dann ist*

$$W : V \to V, v = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} W(e_i)v^i$$

die Arbeitsfunktion ($\in V^*$), die die aufzuwendende Arbeit bei Verschiebung der Ladung um einen beliebigen Vektor v angibt. (Achtung: Für allzu große Vektoren v, oder für zu starke Ladung q ist dieses linearisierte Modell unrealistisch!) Als Funktionsgleichung gilt also

$$W = \sum_{i=1}^{3} W(e_i)E^i.$$

Ist $\underline{e}$ eine Orthonormalbasis, dann ist der Wert der Linearform W auf v offenbar mit dem Skalarprodukt zwischen dem Vektor $q\mathcal{E} := \sum_{i=1}^{3} W(e_i)e_i$ ($\mathcal{E}$ heißt elektrischer Feldstärkenvektor) und v identisch. Es gilt nämlich wegen $G_{\underline{e}} = I$

$$\langle \mathcal{E}, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} W(e_i)D_i(v) = \sum_{i=1}^{3} W(e_i)E^i(v) = W(v).$$

Diese Darstellung von Linearformen als skalare Produkte wird im folgenden auf den Fall beliebiger Basen von Räumen mit innerem Produkt verallgemeinert. Zuvor noch ein etwas komplexeres Beispiel.

Beispiel 20 **Sei V ein endlichdimensionaler K-VR und ρ ein festes Element von $Hom_K(V,V) =: W$. Sei $\underline{e}= (e_1,..e_n)$ eine Basis von V. Die Abbildung*

$$Sp_\rho : W \to K, A \mapsto \sum_{i=1}^{n} M(\rho \circ A, \underline{e})_i^i = Sp(\rho \circ A)$$

ist Element von W^*. Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis $\underline{e}$. (In der Quantentheorie treten Abbildungen dieses Typs als Erwartungswertabblidungen auf, wobei ρ einen Systemzustand und A eine Vermessungsprozedur beschreibt.) Eine Basis von W bilden die n^2 Abbildungen

$$x_i^j := e_i \cdot E^j : V \to V, v \mapsto e_i \cdot E^j(v)$$

für $i,j \in \{1,2,..n\}$. Es gilt

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} M(A, \underline{e})_i^j x_j^i$$

und daher mit der Dualbasis (X_j^i) von W^*

$$Sp_\rho(A) = \sum_{i,j=1}^{n} M(\rho, \underline{e})_i^j M(A, \underline{e})_j^i = \sum_{i,j=1}^{n} M(\rho, \underline{e})_i^j X_j^i(A).$$

Somit gilt die Abbildungsgleichung

$$Sp_\rho = \sum_{i,j=1}^{n} M(\rho, \underline{e})_i^j X_j^i.$$

Satz 34 *Sei V ein endlichdimensionaler K-VR mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist die Abbildung $\flat : V \to V^*$, die jedem Vektor $v \in V$ die Linearform $\flat(v) \in V^*$ mit*

$$\flat(v) : V \to K, w \mapsto \langle v, w \rangle \tag{1.27}$$

zuordnet, eine antilineare Bijektion. Ist $\underline{e} = (e_1, ...e_n)$ eine Basis von V und $\underline{E}$ die Spalte der zu $\underline{e}$ dualen Basiselemente, dann gilt

$$\flat(v) = D_{\underline{e}}(v) \cdot \underline{E} = (\underline{E}(v))^+ \cdot G_{\underline{e}} \cdot \underline{E} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{E^i(v)} \left(G_{\underline{e}}\right)_{i,j} E^j. \tag{1.28}$$

Die zu $\flat$ inverse Abbildung $\flat^{-1} =: \sharp$, ordnet jeder Linearform $X \in V^*$ jenen Vektor in V zu, der $\flat(x) = X$ erfüllt, d. h. es gilt für alle $v \in V$ die Gleichung

$$\langle \sharp(X), v \rangle = X(v). \tag{1.29}$$

Dann ist für alle $X \in V^*$ der Vektor $\sharp(X)$ durch

$$\sharp(X) = \underline{e} \cdot G_{\underline{e}}^{-1} \cdot X(\underline{e})^+ = \sum_{i,j=1}^{n} e_i \left(G_{\underline{e}}^{-1}\right)^{i,j} \overline{X(e_j)}$$

gegeben. ($\flat$ und $\sharp$ heißen "musikalische" (Anti)Isomorphismen.)

Beweis: Die Antilinearität von $\flat$ folgt aus der Antilinearität des inneren Produktes im ersten Argument. Die Formel $\flat(v) = D_{\underline{e}}(v) \cdot \underline{E}$ folgt aus $(\flat(v))(w) = \langle v, w \rangle = D_{\underline{e}}(v) \cdot \underline{E}(w)$, was für alle $w \in V$ gültig ist. Die Injektivität von $\flat$ folgt aus der Bedingung (iii) eines inneren Produktes: seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\flat(v_1) = \flat(v_2)$. Dann gilt für alle $w \in V$ die Gleichung $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$, woraus $v_1 = v_2$ folgt. Sei nun $X \in V^*$ beliebig. Dann existiert eine K-Zeile $X_{\underline{e}} \in M(1, n, K)$ mit $X = X_{\underline{e}} \cdot \underline{E}$. Sie erfüllt $X_{\underline{e}} = X(\underline{e})$. Ein Vektor x, der $\flat(x) = X$ löst, erfüllt $X(v) = \langle x, v \rangle$ für alle $v \in V$. Der Vektor $x := \underline{e} \cdot G_{\underline{e}}^{-1} \cdot X(\underline{e})^+$ tut dies, denn es gilt für alle $i \in \{1, 2, ..n\}$

$$\begin{aligned}
\langle x, e_i \rangle &= \sum_{k,j=1}^{n} \left\langle e_k \left(G_{\underline{e}}^{-1}\right)^{k,j} \overline{X(e_j)}, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \overline{\left(G_{\underline{e}}^{-1}\right)^{k,j}} X(e_j) \langle e_k, e_i \rangle \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} X(e_j) \left(G_{\underline{e}}^{-1}\right)^{j,k} (G_{\underline{e}})_{k,i} = X(e_i).
\end{aligned}$$

Die beiden Linearformen X und $\langle x, \cdot \rangle$ stimmen also auf ganz V überein. Wegen der Injektivität von $\flat$ ist $x := \underline{e} \cdot G_{\underline{e}}^{-1} \cdot X(\underline{e})^+$ die eindeutige Lösung von $X = \langle x, \cdot \rangle = \flat(x)$. □

Bemerkung 40 *Dieser Satz zeigt, daß vermöge der Abbildung $\flat$ den kovarianten Koordinatenzeilen eines Vektors bezüglich verschiedener Basen ein einziges basisunabhängiges Objekt, eine Linearform, entspricht. Das Vorliegen eines inneren Produktes ist allerdings Voraussetzung für eine derartige Konstruktion. Das Beispiel des Differentials der Druckfunktion* (1.26) *zeigt, daß ein inneres Produkt im allgemeinen einem Problem fremd ist und willkürlich eingeführt werden muß, falls man zwanghaft auf der Darstellung von Linearformen durch innere Produkte besteht. So ist im Fall der Druckfunktion ein Minkowskisches inneres Produkt gleich wenig motiviert wie ein Skalarprodukt. Der der Linearform L zugeordnete Vektor $\sharp(L)$ hängt zwar von der Wahl des inneren Produktes ab, auf die Bildung $\langle \sharp(L), \cdot \rangle$ hat diese Wahl jedoch keinen Einfluß. Wird ein inneres Produkt also ausschließlich zur Formulierung von Linearformen eingeführt, ist es redundanter Ballast.*

Beispiel 21 *Der dreidimensionale reelle VR V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ beschreibe die möglichen Verschiebungen eines Gegenstandes der Masse M aus einem Punkt der Erdoberfläche. Sei $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine ON-Basis von V. Der Vektor e_1 zeige horizontal nach Süden, e_2 zeige horizontal nach Osten und e_3 in den Zenith. Der Gegenstand wird längs beliebiger Vektoren einer geneigten Ebene $W \trianglelefteq V$ verschoben. Diese Ebene fällt in Richtung Süden mit einer Neigung von $30°$ ab und steigt nach Osten mit $60°$ an. Eine Basis $\underline{f} = (f_1, f_2)$ von W bestehe aus Einheitsvektoren. f_1 zeigt nach Süden und f_2 nach Osten. Die Energie, die aufzuwenden ist, um den Gegenstand um $v \in V$ zu verschieben, ist mit der Erdbeschleunigung $g(\approx 10\,[ms^{-2}])$ und der Schwerkraft $F := -gMe_3$, durch die Linearform $\Phi := \flat(-F)$ gegeben. Es gilt also für alle $v \in V$*

$$\Phi(v) = gM\,\langle e_3, v\rangle\,.$$

Der Vektor $F := -gMe_3$ ist die Kraft, mit der die Erde am Körper zieht. Die für Verschiebungen um Vektoren $w \in W$ wirksame Schwerkraft F_W soll berechnet werden. (Sie legt die Richtung fest, in die ein Ball die Ebene hinunter zu rollen beginnt.) Welchen Winkel bilden F_W und f_1 und welche Neigung hat der Hang?

Lösung: *Es gilt $F_W = \natural(-\Phi\mid_W)$, wobei hier $\natural : W^* \to W$ der zu $\langle\cdot,\cdot\rangle\mid_W$ gehörige metrische Isomorphismus ist. Um F_W nach der Formel*

$$F_W = -\underline{f}\cdot G_{\underline{f}}^{-1}\cdot\Phi(\underline{f})^+$$

zu berechnen, werden $\Phi(\underline{f})$, die metrische Matrix $G_{\underline{f}}$ von $\langle\cdot,\cdot\rangle\mid_W$ und $G_{\underline{f}}^{-1}$ benötigt. Es gilt

$$\underline{f} = (e_1, e_2, e_3)\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}, & 0\\ 0, & 1\\ -1, & \sqrt{3}\end{pmatrix}\frac{1}{2},$$

und $\Phi(\underline{f}) = \frac{gM}{2}\begin{pmatrix}-1, & \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Die metrische Matrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle\mid_W$ bezüglich $\underline{f}$ und ihre Inverse sind dann

$$\begin{aligned} G_{\underline{f}} &= \begin{pmatrix}1, & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}, & 1\end{pmatrix},\\ G_{\underline{f}}^{-1} &= \frac{4}{13}\begin{pmatrix}4, & \sqrt{3}\\ \sqrt{3}, & 4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit folgt aus $F_W = \natural(-\Phi\mid_W)$ die Koordinatendarstellung bezüglich $\underline{f}$ zu

$$\begin{aligned} F_W &= -(f_1, f_2)\cdot G_{\underline{f}}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\Phi(f_1)\\ \Phi(f_2)\end{pmatrix}\\ &= \frac{2gM}{13}(f_1, f_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{2gM}{13}(f_1 - 3\sqrt{3}f_2).\end{aligned}$$

Das Betragsquadrat von F_W:

$$\begin{aligned}\langle F_W, F_W\rangle &= -\Phi(F_W) = -\Phi(\underline{f})\cdot U_{\underline{f}}(F_W)\\ &= -\frac{2gM}{13}\frac{gM}{2}\begin{pmatrix}-1, & \sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix} = (gM)^2\,\frac{10}{13}.\end{aligned}$$

Der Winkel θ zwischen F_W und f_1 ergibt sich mit

$$\cos\theta = \frac{\langle F_W, f_1\rangle}{\parallel F_W\parallel\parallel f_1\parallel} = \frac{-\Phi(f_1)}{gM\sqrt{\frac{10}{13}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{10}}$$

zu $\approx 55°$. Die Neigung des Hanges ist der Komplementärwinkel α' des Winkels α zwischen e_3 und $-F_W$. Dieser Winkel α' folgt mit

$$\cos\alpha = \frac{\langle -F_W, e_3\rangle}{\parallel F_W\parallel\parallel e_3\parallel} = \frac{gM\frac{10}{13}}{gM\sqrt{\frac{10}{13}}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

zu $\approx 61°$.

Die folgende Definition konstruiert aus dem inneren Produkt von V ein solches von V^*.

Definition 9 *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ das innere Produkt von V. Dann ist*

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*} &: V^*\times V^*\to K,\\ \langle X,Y\rangle_{V^*} &= \langle\natural(Y),\natural(X)\rangle_V = Y\left(\natural(X)\right)\end{aligned}$$

ein inneres Produkt von V^*. Es heißt das von $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ auf V^* induzierte innere Produkt ("Kometrik").

Satz 35 *Für $X,Y\in V^*$ gilt $\langle X,Y\rangle_{V^*} = Y(\underline{e})\cdot G_{\underline{e}}^{-1}\cdot X(\underline{e})^+ = \sum_{i,j=1}^n Y(e_i)\left(G_{\underline{e}}^{-1}\right)^{i,j}\overline{X(e_j)}$.*

Beweis: Wegen $\langle X,Y\rangle_{V^*} = \langle\natural(Y),\natural(X)\rangle_V = Y\left(\natural(X)\right)$ und

$$\natural(X) = \underline{e}\cdot G_{\underline{e}}^{-1}\cdot X(\underline{e})^+$$

folgt aus der Linearität von Y

$$Y\left(\natural(X)\right) = Y\left(\underline{e}\cdot G_{\underline{e}}^{-1}\cdot X(\underline{e})^+\right) = Y(\underline{e})\cdot G_{\underline{e}}^{-1}\cdot X(\underline{e})^+.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

1.9 Die adjungierte einer linearen Abbildung

In diesem Abschnitt bezeichnet V einen n-dimensionalen K-VR mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für eine $n\times n$ Matrix M mit Einträgen aus K wurde in MPI die adjungierte Matrix M^+ erklärt. Dieser Begriff wird nun auf lineare Abbildungen von V nach V verallgemeinert. Der Begriff spielt unter anderem (nach einer weiteren Verallgemeinerung auf Vektorräume unendlicher Dimension) in der Quantentheorie eine wichtige Rolle. Dort werden ausschließlich solche linearen Abbildungen, die mit ihren adjungierten übereinstimmen, zur Beschreibung von Vermessungsprozeduren herangezogen.

Definition 10 *Sei $A: V\to V$ linear. Dann ist für $w\in V$ die Abbildung*

$$\flat(w)\circ A: V\to K, v\mapsto\langle w,A(v)\rangle$$

eine Linearform auf V. Es gilt daher für genau den Vektor

$$A^*(w) := \natural(\flat(w)\circ A)\in V \tag{1.30}$$

die Beziehung

$$\langle A^*(w),v\rangle = \langle w,A(v)\rangle \tag{1.31}$$

für alle $v\in V$. Die Abbildung $A^*: V\to V, w\mapsto A^*(w)$ ist linear(!) und heißt die zu A adjungierte Abbildung. Eine Abbildung A mit $A^*=A$ heißt selbstadjungiert (oder hermitesch).

Bemerkung 41 *Die Definition enthält viele Bausteine und ist daher anfänglich schwer zu begreifen. Sie ist jedoch vollkommen explizit und daher konstruktiv. Die sparsamere implizite Bestimmungsgleichung (1.31) reicht jedoch für viele Überlegungen aus, wie die Beweise der folgenden Sätze illustrieren. Zu beachten ist, daß die Adjunktion $A\to A^*$ von der Wahl des inneren Produktes abhängt. Sind in einem Modell mehrere innere Produkte im Spiel, dann gehört zu jedem inneren Produkt eine eigene Adjunktion.*

Satz 36 *Für die Adjunktion beliebiger linearer Abbildungen $A,B\in Hom_K(V,V)$ gilt für alle $a,b\in K$: (i) $(A^*)^*=A$, (ii) $(aA+bB)^* = \overline{a}A^*+\overline{b}B^*$, (iii) $(A\circ B)^* = B^*\circ A^*$.*

Beweis: Für alle $v,w\in V$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle(A^*)^*(w),v\rangle &= \langle w,A^*(v)\rangle = \overline{\langle A^*(v),w\rangle}\\ &= \overline{\langle v,A(w)\rangle} = \langle A(w),v\rangle\,.\end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen. Weiter gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}\langle (aA+bB)^*(w), v\rangle &= \langle w, (aA+bB)(v)\rangle \\ &= a\langle w, A(v)\rangle + b\langle w, B(v)\rangle \\ &= \langle \overline{a}A^*(w), v\rangle + \langle \overline{b}B^*(w), v\rangle \\ &= \langle (\overline{a}A^* + \overline{b}B^*)(w), v\rangle .\end{aligned}$$

Damit ist (ii) bewiesen. Schließlich gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}\langle (A\circ B)^*(w), v\rangle &= \langle w, A\circ B(v)\rangle = \langle A^*(w), B(v)\rangle \\ &= \langle B^*\circ A^*(w), v\rangle\end{aligned}$$

Damit ist (iii) bewiesen. □

Der folgende Satz gibt die Matrix von A^* an.

Satz 37 *Ist $\underline{e}$ eine Basis von V und $A : V \to V$ linear. Dann gilt für die Matrix von A^**

$$M(A^*, \underline{e}) = G_{\underline{e}}^{-1} \cdot M(A, \underline{e})^+ \cdot G_{\underline{e}}, \tag{1.32}$$

oder eintragsweise

$$M(A^*, \underline{e})^i_j = \sum_{r,s=1}^{n} (G_{\underline{e}}^{-1})^{i,r}\overline{M(A, \underline{e})^s_r}(G_{\underline{e}})_{s,j}. \tag{1.33}$$

Beweis: Für alle $i, j \in \{1, 2, ..n\}$ gilt

$$\langle e_i, A^*(e_j)\rangle = \sum_{r=1}^{n} M(A^*, \underline{e})^r_j \langle e_i, e_r\rangle = \sum_{r=1}^{n} (G_{\underline{e}})_{i,r} M(A^*, \underline{e})^r_j.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\langle e_i, A^*(e_j)\rangle &= \overline{\langle e_j, A(e_i)\rangle} = \sum_{s=1}^{n} \overline{M(A, \underline{e})^s_i (G_{\underline{e}})_{j,s}} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \overline{M(A, \underline{e})^s_i}(G_{\underline{e}})_{s,j}.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Beispiel 22 *Sei V reell, dreidimensional und orientiert. $\langle \cdot, \cdot\rangle$ sei ein Skalarprodukt. Für $u \in V$ erfüllt der Drehgenerator L_u die Beziehung $L_u^* = -L_u$. Dies folgt unmittelbar aus*

$$\langle w, L_u(v)\rangle = \langle w, u \times v\rangle = or(\underline{e}) \det\left(\underline{E}(w), \quad \underline{E}(u), \quad \underline{E}(v) \right)$$

und

$$\begin{aligned}\langle w, L_u^*(v)\rangle &= \langle L_u(w), v\rangle = \langle v, u \times w\rangle \\ &= or(\underline{e}) \det\left(\underline{E}(v), \quad \underline{E}(u), \quad \underline{E}(w) \right) \\ &= -or(\underline{e}) \det\left(\underline{E}(w), \quad \underline{E}(u), \quad \underline{E}(v) \right).\end{aligned}$$

Die in der Quantentheorie gebräuchlichen komplexifizierten Abbildungen iL_u^c sind dann wegen $(iL_u^c)^* = \overline{i}L_u^{c*} = iL_u^c$ selbstadjungiert.

Beispiel 23 *Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ und einer ON-Basis $\underline{e} = (e_0, e_1, .., e_n)$. Die lineare Abbildung $a : V \to V$ sei durch*

$$\begin{aligned}a(e_i) &= \sqrt{i}e_{i-1} \qquad \text{für } i \in \{1, 2, .., n\}, \\ a(e_0) &= 0\end{aligned}$$

definiert. Die adjungierte Abbildung a^* und die Abbildungen $a^* \circ a$ und $a \circ a^*$ sollen berechnet werden. Das Problem ist für die Quantentheorie von harmonischen Oszillatoren relevant.

Lösung: *Die Matrix von a bezüglich der Basis $\underline{e}$ ist*

$$M(a,\underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $G_{\underline{e}} = I$ gilt, folgt $M(a^*,\underline{e}) = M(a,\underline{e})^+$ also

$$M(a^*,\underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} a^*(e_i) &= \sqrt{i+1}e_{i+1} \qquad \text{für } i \in \{0,1,2,..,n-1\}, \\ a^*(e_n) &= 0. \end{aligned}$$

Die Abbildung $a^* \circ a$ erfüllt somit

$$(a^* \circ a)(e_i) = ie_i \qquad \text{für } i \in \{0,1,2,..,n\}$$

und

$$(a \circ a^*)(e_i) = \begin{cases} (i+1)e_i & \text{für } i \in \{0,1,2,..,n-1\}, \\ 0 \qquad \text{für } i = n \end{cases}.$$

Daraus folgt für $[a,a^*] = a \circ a^* - a^* \circ a$ die Beziehung

$$[a,a^*](e_i) = \begin{cases} e_i & \text{für } i \in \{0,1,2,..,n-1\}, \\ -ne_n \qquad \text{für } i = n \end{cases}.$$

Also gilt

$$[a,a^*] = id_V - (n+1)e_n \langle e_n, \cdot \rangle .$$

Probe:

$$\begin{aligned} M(a^* \circ a,\underline{e}) &= M(a^*,\underline{e}) \cdot M(a,\underline{e}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & 0 \\ . & & & & ... & . \\ 0 & & & & . & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

etc. nachrechnen.

Satz 38 *Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ eines K-VRs V mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Invarianz genau dann, wenn $A^* = A^{-1}$ gilt.*

Beweis: Sei A eine Invarianz. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\langle w, v\rangle = \langle A(w), A(v)\rangle = \langle A^*(A(w)), v\rangle\,,$$

also $A^* \circ A = id_V$. Wegen $\det(A) = \pm 1$ ist A bijektiv und es gilt $A^* = A^{-1}$. Gilt umgekehrt $A^* = A^{-1}$, dann folgt für alle $v, w \in V$

$$\langle A(w), A(v)\rangle = \langle A^*(A(w)), v\rangle = \langle w, v\rangle\,.$$

Damit ist A Invarianz. □

Der folgende Satz spielt als Unitaritätskriterium für quantendynamische Zeitevolutionen eine Rolle.

Satz 39 *Sei V ein K-VR mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Die Elemente $A, B \in Hom_K(V,V)$ mögen $[A,B] := A\circ B - B\circ A = 0$ erfüllen. Dann gilt (i) $e^{A+B} = e^A \circ e^B$, (ii) $(e^A)^* = e^{A^*}$, (iii) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

Beweis: Mit der Exponentialreihe nachrechnen. Illustration: 3-dimensionale Drehung e^{L_u}. □

Definition 11 *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein skalares Produkt auf V. Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ heißt Orthogonalprojektion, falls ein Untervektorraum W von V existiert, sodaß $A(v) = v$ für alle $v \in W$ gilt und $A(w) = 0$ für alle w im "orthogonalen Komplement" $W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, x\rangle = 0 \forall x \in W\}$ von W.*

Bemerkung 42 *A heißt "die" Orthogonalprojektion auf W, da $A(V) = W$ gilt, und A durch W eindeutig bestimmt ist. Ferner ist $id_V - A$ die Orthogonalprojektion auf $W^\perp$.*

Beispiel 24 *Für $x \in V \setminus 0$ ist die Abbildung $x\frac{b(x)}{\langle x,x\rangle} : V \to V, v \mapsto x\frac{\langle x,v\rangle}{\langle x,x\rangle}$ die Orthogonalprojektion auf $K\cdot x$. (Solche Orthogonalprojektionen treten in der Quantentheorie als "reine" Zustände auf.)*

Satz 40 *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein skalares Produkt auf V. Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $A^2 = A$ und $A^* = A$ gilt.*

Beweis: Wird weggelassen.

Satz 41 *Sei $\underline{v} = (v_1, ..v_m)$ eine ON-Basis eines Untervektorraumes W von V. Dann erfüllt die Orthogonalprojektion A auf W die Gleichung*

$$A = \sum_{i=1}^{m} v_i \langle v_i, \cdot\rangle\,. \tag{1.34}$$

Beweis: Nachrechnen. □

Satz 42 *Sei $A : V \to V$ eine Orthogonalprojektion eines endlichdimensionalen K-VRs V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann gilt für alle $z \in K$*

$$e^{zA} = (id_V - A) + e^z A.$$

Beweis: Es gilt wegen $A^2 = A$

$$\begin{aligned} e^{zA} &= id_V + zA + \frac{z^2 A}{2!} + ... \\ &= id_V - A + (1 + z + \frac{z^2}{2!} + ...)A \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung 43 *Aus MPI ist bekannt, daß eine selbstadjungierte lineare Abbildung A eines endlichdimensionalen K-VRs V mit Skalarprodukt eine orthogonale Basis von Eigenvektoren besitzt. Dieser Sachverhalt ist gleichbedeutend zu folgendem. Sei $spec(A) = \{\lambda_1, ...\lambda_k\}$ die Menge der Eigenwerte von A.*

Sind A_i die Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume $\ker(A-\lambda_i id_V)$*, dann gilt (i)* $A_i \circ A_j = \delta_{i,j}A_i$*, (ii)* $\sum_{i=1}^k A_i = id_V$ *und (iii)* $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$*. Damit folgt für alle* $z \in K$

$$\begin{aligned} e^{zA} &= e^{z\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i} = \prod_{i=1}^k e^{z\lambda_i A_i} \\ &= \prod_{i=1}^k \left(id_V + (e^{\lambda_i z}-1)A_i\right) \\ &= (id_V)^k + (id_V)^{k-1}\sum_{i=1}^k (e^{z\lambda_i}-1)A_i \\ &= id_V + \sum_{i=1}^k e^{z\lambda_i}A_i - \sum_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k e^{z\lambda_i}A_i. \end{aligned}$$

Die Formel

$$e^{zA} = \sum_{i=1}^k e^{z\lambda_i}A_i \tag{1.35}$$

heißt Spektraldarstellung der Funktion $K \ni z \mapsto e^{zA}$ *zu einer salbstadjungierten linearen Abbildung A. Sie findet häufige Anwendung folgender Art. Sei* $v \in V$ *beliebig und soll* $e^{zA}(v)$ *berechnet werden, dann wird mit* $e^{zA}(v) = \sum_{i=1}^k e^{z\lambda_i}A_i(v)$ *begonnen. Die Zerlegung* $v = \sum_{i=1}^k A_i(v)$ *heißt Spektralzerlegung von v und ist besonders nützlich dann, wenn nur wenige spektrale Komponenten* $A_i(v)$ *von v die Summe dominieren.*

1.10 Tensorprodukte

Ein Tensorprodukt kann mit dem Zusammenklicken von zwei Legobausteinen verglichen werden. Aus zwei Vektorräumen entsteht ein neuer. So entsteht etwa aus den Ortsvektoren zu den Bestandteilen eines starren Körpers sein Trägheitsmomententensor. Er reguliert die Energie eines rotierenden starren Körpers.

Aus MPI ist bekannt, wie zu zwei K-VRen V und W das kartesische Produkt $V \times W$ mit einer VR-Struktur versehen wird. Zwei Elemente (u,v) und (x,y) von $V \times W$ werden komponentenweise addiert: $(u,v)+(x,y) = (u+x, v+y)$ und es wird komponentenweise mit Skalaren multipliziert $a(u,v) = (au, av)$. Sind $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ und $\underline{f} = (f_1, ..f_m)$ Basen von V und W, dann ist $\underline{g} = ((e_1,0), ..(e_n,0), (0,f_1), ..(0,f_m))$ eine Basis von $V \times W$. Die Dimension von $V \times W$ erfüllt also $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$. Sind $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ innere Produkte von V und W, dann ist durch

$$\langle (u,v),(x,y)\rangle_{V\times W} = \langle u,x\rangle_V + \langle v,y\rangle_W$$

ein inneres Produkt auf $V \times W$ erklärt. Zustandsraumvergrößerungen werden in der klassischen Physik meist durch kartesische Produktbildung vorgenommen.

In diesem Abschnitt wird eine weitere Konstruktion beschrieben, die zwei K-Vektorräumen V und W einen bis auf Isomorphie eindeutigen weiteren K-VR, den Tensorproduktraum $V \otimes W$ zuordnet. Diese Konstruktion findet etwa in der Quantentheorie zusammengesetzter Systeme weitläufige Anwendung (und hat dort irritierende Konsequenzen für Schrödingers Getier). Eine andere wichtige Anwendung bietet die Berechnung der "Teilchenmultipletts" zu den höheren Symmetriegruppen der Elementarteilchenphysik (z. B. Quarkmodell). Als äußerst klärend erweist sich ferner der Tensorbegriff bei der Formulierung von Naturgesetzen mit Symmetriegruppen, wie etwa den Feldgleichungen der relativistischen Elektrodynamik. So gibt die Formulierung des Feldstärketensor(felde)s (zusammen mit dem absoluten Differentialkalkül Cartans) einen begrifflichen Rahmen, der die Alternativen: (i) relativistische Invarianz der Theorie oder (ii) Einführung eines Äthers mathematisch greifbar macht. In der heute akzeptierten Variante (i) läßt der Tensorbegriff die Symmetriegruppe $O(1,3)$ offensichtlich werden, während sie in der Formulierung mit den elektrischen und magnetischen Feldstärken als überraschende Kuriosität nach längerer Rechnung zutage tritt (und deshalb von ihren Entdeckern Lorentz und Fitzgerald nicht ernst genommen werden konnte).

Definition 12 *Seien V und W zwei K-VRe mit den Basen $\underline{e} = (e_1, ..e_m)$ und $\underline{f} = (f_1, ..f_n)$, dann heißt ein dritter K-VR Z, zusammen mit einer solchen bilinearen Abbildung $\pi : V \times W \to Z$, daß die Elemente*

$$\begin{pmatrix} \pi(e_1, f_1) & .. & \pi(e_1, f_n) \\ & ... & \\ \pi(e_m, f_1) & .. & \pi(e_m, f_n) \end{pmatrix}$$

eine Basis von Z bilden, ein Tensorproduktraum und wird als $Z = V \otimes W$ bezeichnet. Die Abbildung π heißt Tensorprodukt, und es wird notiert $\pi(v, w) = v \otimes w$. Es gilt $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Sind $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ innere Produkte von V und W, dann heißt jenes innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$ von Z, das für alle $x, v \in V$ und $y, w \in W$

$$\langle v \otimes w, x \otimes y \rangle_Z = \langle v, x \rangle_V \langle w, y \rangle_W \tag{1.36}$$

erfüllt, das vom Tensorprodukt induzierte innere Produkt. Sind $A : V \to V$ und $B : W \to W$ linear, dann heißt jene lineare Abbildung $C : Z \to Z$ die vom Tensorprodukt induzierte Produktabbildung zwischen A und B, falls für alle $(v, w) \in V \times W$ gilt

$$C(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w).$$

Es wird notiert $C = A \otimes B$.

Bemerkung 44 *Aufgrund der Bilinearität eines Tensorproduktes $\pi : V \times W \to Z$ gelten die folgenden Rechenregeln*

$$(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w, v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w', \tag{1.37a}$$

$$(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = l(v \otimes w). \tag{1.37b}$$

Satz 43 *Seien V und W zwei endlichdimensionale K-VRe. X sei ein weiterer K-VR. Dann gilt*

(i) Es existiert ein Tensorprodukt von V mit W.

(ii) Sind $\pi : V \times W \to Z$ und $\pi' : V \times W \to Z'$ Tensorprodukte, dann existiert eine lineare Bijektion $i : Z \to Z'$ mit $i \circ \pi = \pi'$.

(iii) Sei $\pi : V \times W \to Z$ ein Tensorprodukt und sei $b : V \times W \to X$ bilinear. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\widetilde{b} : Z \to X$ mit $\widetilde{b} \circ \pi = b$.

Beweis: *wird weggelassen.* □

Bemerkung 45 *Der Satz klärt, (i) daß die obige Definition eines Tensorproduktes nicht inhaltsleer ist, (ii) daß verschiedene Tensorprodukte derselben Räume ineinander im Einklang mit den VR-Strukturen "übersetzbar" sind und deshalb oft ohne Spezifikation von Z und π von "dem" Tensorprodukt $V \otimes W$ gesprochen wird. Teil (iii) zeigt, daß bilineare Abbildungen auf Tensorprodukte zurückzuführen sind. Dies ist insofern von Bedeutung, als die Menge der bilinearen Abbildungen $b : V \times W \to Z$ größer ist als die der linearen Abbildungen $A : V \times W \to Z$. Hierzu ein Beispiel. Seien e_1, e_2 linear unabhängige Elemente von V. Dann gilt $\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j}(e_i, e_j) = 0 \in V \times V$. Für eine lineare Abbildung $A : V \times V \to Z$ gilt somit $A(\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j}(e_i, e_j)) = 0 \in Z$, während für ein Tensorprodukt $\pi : V \times V \to Z$ definitionsgemäß*

$$\pi(\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j}(e_i, e_j)) = \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} e_i \otimes e_j \neq 0 \in Z$$

folgt.

Beispiel 25 *Sei V ein K-VR und $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ eine Basis von V. Dann ist $\pi : V \times V^* \to Hom_K(V, V)$ mit $\pi(e_i, E^j) = e_i \otimes E^j : V \to V$ mit $(e_i \otimes E^j)(e_k) = \delta^j_k e_i$ für $i, j \in \{1, ..n\}$ ein Tensorprodukt, da diese Abbildungen eine Basis von $Hom_K(V, V)$ bilden. Es gilt für ein beliebiges $A \in Hom_K(V, V)$*

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} M(A, \underline{e})^i_j e_i \otimes E^j.$$

(Kontrolle durch Auswertung der Gleichung für $v \in V$.) Aufgrund dieses Sachverhaltes wurden im 19. Jahrhundert lineare Selbstabbildungen eines VR's als Tensoren bezeichnet.

Die identische Abbildung id_V erfüllt somit

$$id_V = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes E^i.$$

Für alle Paare $(v, X) \in V \times V^*$ gilt (für $n > 1$) $id_V \neq v \otimes X$. Dies sieht man so. Aus der Annahme $id_V = v \otimes X$ folgt nämlich wegen

$$v \otimes X = \sum_{i,j=1}^{n} v^i X(e_j) e_i \otimes E^j$$

für alle i, j die Beziehung $v^i X(e_j) = \delta^i_j$. Daraus wiederum folgt $v^i \neq 0$ und $X(e_i) \neq 0$ für alle i, was im Widerspruch zu $v^1 X(e_2) = 0$ steht.

In der Quantentheorie werden Elemente eines Tensorproduktraumes, die bezüglich eines gewählten Produktes nicht faktorisieren als "verschränkt" bezeichnet. (Achtung: ob ein Element verschränkt ist oder nicht, hängt von der jeweils betrachteten Abbildung π ab!)

Beispiel 26 *Sei V ein K-VR und $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ eine Basis von V. Dann ist die Abbildung $\pi : V^* \times V^* \to Bil(V \times V, K)$, die Werte im VR $Bil(V \times V, K)$ der Bilinearformen annimmt und durch*

$$\pi(E^i, E^j) =: E^i \otimes E^j : V \times V \to K, \quad E^i \otimes E^j(e_k, e_l) := \delta^i_k \delta^j_l$$

definiert ist, ein Tensorprodukt. Denn für jede bilineare Abbildung $B : V \times V \to K$ existiert genau ein Satz von Zahlen $B_{i,j} \in K$ mit $B = \sum_{i,j=1}^{n} B_{i,j}(E^i \otimes E^j)$. Es gilt $B_{i,j} = B(e_i, e_j)$. Ein inneres Produkt eines reellen VR's kann somit als Tensor aufgefaßt werden

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum (G_{\underline{e}})_{i,j} E^i \otimes E^j.$$

Sei nun spezieller V ein reeller, dreidimensionaler VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sind $(v_1, ...v_n) \in V^n$ die Verschiebungen von Punktladungen der Stärke $q_i \in \mathbb{R}$ aus einem zentralen Ort, dann heißt die Bilinearform von V

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha \left(3 \langle v_\alpha, \cdot \rangle \otimes \langle v_\alpha, \cdot \rangle - \parallel v_\alpha \parallel^2 \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$$

der "Quadrupolmomententensor" der Ladungsverteilung. Sein Beitrag zur Potentialfunktion $\Phi : V \to \mathbb{R}$ wird in der Elektrodynamik zu

$$4\pi\varepsilon_0 \Phi_Q(x) = \frac{Q(x, x)}{2 \parallel x \parallel^5}$$

berechnet. Ist $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine ON-Basis von V, dann gilt

$$Q = \sum_{i,j} Q_{i,j} E^i \otimes E^j,$$

mit den Koordinaten

$$Q_{i,j} = Q(e_i, e_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha \left(3 \langle v_\alpha, e_i \rangle \langle v_\alpha, e_j \rangle \right) - \parallel v_\alpha \parallel^2 \delta_{i,j} \Big).$$

Beispiel 27 *Sei V ein K-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\underline{e} = (e_1, e_2)$ eine ON-Basis von V. Welche Norm hat $v := e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$? Faktorisiert v? Welchen Wert hat $\langle v, w \rangle$ für $w := e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$?*

Lösung:

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \rangle \\ &= \langle e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 \rangle + .. \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle + .. \\ &= 2. \end{aligned}$$

Suche Vektoren $x, y \in V$ mit $x \otimes y = v$. Wegen $x = \underline{e} \cdot \underline{E}(x), y = \underline{e} \cdot \underline{E}(y)$ folgt aus der Bilinearität von $\otimes$:

$$x \otimes y = \sum_{i,j=1}^{2} E^i(x) E^j(y) \, (e_i \otimes e_j) \, .$$

Daraus folgt $E^1(x)E^2(y) = E^2(x)E^1(y) = 1$ und $E^1(x)E^1(y) = E^2(x)E^2(y) = 0$. Das erste Gleichungspaar impliziert $E^1(x) \neq 0, E^2(x) \neq 0, E^1(y) \neq 0, E^2(y) \neq 0$. Diese Gleichungen widersprechen dem zweiten Paar. Daher ist v "verschränkt".

$$\langle v, w \rangle = \langle e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \rangle = .. = 0.$$

In der Quantentheorie werden Vektoren $v \in V$ meist durch $|v\rangle$ notiert und ein Tensorprodukt $v \otimes w$ zu $|v\rangle \, |w\rangle$ verkürzt.

Beispiel 28 *Seien V und W endlichdimensionale K-VRe mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Seien $A : V \to V$ und $B : W \to W$ linear und sei $C = A \otimes id_W + id_V \otimes B$. Dann folgt $e^C = e^A \otimes e^B$. Falls zusätzlich gilt, $A = -A^*$ und $B = -B^*$, dann folgt e^C ist Invarainz von $V \otimes W$. Das Beispiel ist für die Dynamik zweier entkoppelter Quantensysteme von Bedeutung.*

Bemerkung 46 *Auf einigermaßen offensichtliche Weise kann das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen zum Produkt von endlich vielen Vektorräumen $V_1, ..V_p$ ausgebaut werden. Innere Produkte der Räume $V_1, ..V_p$ können zu einem inneren Produkt von $V_1 \otimes .. \otimes V_p$ übertragen werden. (Alle betrachteten VRe sind endlichdimensional.)*

Die basisunabhängige Spur einer linearen Abbildung kann auf Tensoren $T \in W \otimes V \otimes W' \otimes V^* \otimes W''$ verallgemeinert werden. Die Kontraktion eines solchen Tensors T bezüglich der Faktoren V und V^* ist der Tensor $Kont(T) \in W \otimes W' \otimes W''$, wobei $Kont : W \otimes V \otimes W' \otimes V^* \otimes W'' \to W \otimes W' \otimes W''$ jene lineare Abbildung ist, die für eine Basis $\underline{e}$ von V für alle i, j und für alle $(w, w', w'') \in (W, W', W'')$

$$Kont : w \otimes e_i \otimes w' \otimes E^j \otimes w'' \mapsto \delta_i^j \cdot w \otimes w' \otimes w''$$

erfüllt. Die Definition von Kont ist unabhängig (!) von der Wahl von $\underline{e}$.

Für Tensorprodukte, die einen Vektorraum V mit innerem Produkt als Faktor enthalten, ist die Operationen des "Indexziehens" erklärt. Es sind die antilinearen Abbildungen

$$\uparrow_V := id_W \otimes \natural \otimes id_{W'} : W \otimes V^* \otimes W' \to W \otimes V \otimes W',$$
$$\downarrow_V := id_W \otimes \flat \otimes id_{W'} : W \otimes V \otimes W' \to W \otimes V^* \otimes W'.$$

Bemerkung 47 *In der traditionellen Tensorrechnung wurde ein Tensor $T \in V_1 \otimes .. \otimes V_p$ mit seinen Koordinatenpaketen $\left(T^{i_1,..i_p}\right)_{\underline{e}}$ bezüglich der Basen $\underline{e_1}, ...\underline{e_p}$ der Vektorräume $V_1, ..V_p$ identifiziert. (Diese Pakete sind eine Verallgemeinerung von Matritzen.) Der Zusammenhang zwischen einem Tensor und seinen Koordinaten ist*

$$T = \sum_{i_1,..,i_p} \left(T^{i_1,..i_p}\right)_{\underline{e}} e_{1,i_1} \otimes .. \otimes e_{p,i_p} .$$

Die Berechnung der Koordinaten bezüglich irgend einer anderen Basis $\underline{f}$ von V ist aus dieser Formel einfach abzulesen. In der alten Version brauchte man nicht zu formulieren, was der Tensor selbst ist, benötigte aber die Umrechnungsformeln als Definition, um zu klären, welche verschiedenen Koordinatenpakete bezüglich welcher Basen denselben Tensor repräsentieren.

Am Spezialfall von Tensorprodukten eines Vektorraumes V mit sich selbst und seinem Dualraum V^*- dies kommt in der Physik häufiger vor- sollen die Umrechnungsformeln der Koordinatenpakete noch etwas genauer behandelt werden. Ein Element

$$T = \sum_{i_1,..,j_p} \left(T^{i_1,..i_p}_{j_1,..j_q}\right)_{\underline{e}} e_{i_1} \otimes .. \otimes e_{i_p} \otimes E^{j_1} \otimes .. \otimes E^{j_q}$$

von

$$V \otimes ... \otimes V \otimes V^* \otimes .. \otimes V^* =: \otimes^p V \otimes^q V^*$$

wechselt seine Koordinaten $\left(T^{i_1,..i_p}_{j_1,..j_q}\right)_{\underline{e}}$ *bezüglich einer aus den Tensoren*

$$e_{i_1} \otimes .. \otimes e_{i_p} \otimes E^{j_1} \otimes .. \otimes E^{j_q}$$

gebildeten Basis beim Übergang zur analog dazu aus $e'_i = \sum_j e_j A^j_i$ *gebildeten Basis offenbar so*

$$\left(T^{i'_1,..i'_p}_{j'_1,..j'_q}\right)_{\underline{e}'} = \sum_{i_1,..j_q=1}^{n} \left(A^{-1}\right)^{i'_1}_{i_1} .. \left(A^{-1}\right)^{i'_p}_{i_p} (A)^{j_1}_{j'_1} .. (A)^{j_q}_{j'_q} \left(T^{i_1,..i_p}_{j_1,..j_q}\right)_{\underline{e}}.$$

Das unterschiedliche Transformationsverhalten der beiden Indextypen gab Anlaß zur Sprachregelung: hochgestellte Indizes transformieren kontravariant, da mit A^{-1}*, und tiefgestellte kovariant, da mit* A*. (Gegensinnig und gleichsinnig zur Basiswechselformel.) Der Tensor heißt p-fach kontra- und q-fach kovariant.*

Bemerkung 48 *Eine öfter benützte Realisierung des Tensorproduktes* $\otimes^p V \otimes^q V^*$ *ist die folgende. Die Elemente von* $\otimes^p V \otimes^q V^*$ *sind Multilinearformen auf* $(V^*)^p \times (V)^q$ *und es gilt*

$$\begin{aligned} \pi(v_1,..,v_p,X^1,..,X^q) &: (V^*)^p \times (V)^q \to K, \\ \pi(v_1,..,v_p,X^1,..,X^q) &: (S^1,..,S^p,w_1,..w_q) \mapsto \left(\prod_{i=1}^{p} S^i(v_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{q} X^i(w_i)\right). \end{aligned}$$

Bemerkung 49 **Für Tensorprodukträume eines Raumes* V *mit sich selbst, also* $\otimes^p V$*, sind die folgenden Untervektorräume von quantenphysikalischer Bedeutung. Ein Tensor* $T \in \otimes^p V$ *heißt symmetrisch bzw. alternierend, falls die Koordinaten von* T *bezüglich einer aus den Vektoren* $e_{i_1} \otimes .. \otimes e_{i_p}$ *gebildeten Basis für alle* $(i_1,..,i_p)$ *und für alle Permutationen* $\sigma : \{1,..,p\} \to \{1,..,p\}$ *die Gleichung* $T^{i_{\sigma(1)},..,i_{\sigma(p)}} = T^{i_1,..,i_p}$ *bzw.* $T^{i_{\sigma(1)},..,i_{\sigma(p)}} = sig(\sigma) T^{i_1,..,i_p}$ *erfüllen. Das Signum einer Permutation* $sig(\sigma)$ *nimmt die Werte* ± 1 *an. Den Wert* $+1$*, falls* σ *die Hintereinanderausführung von einer geraden Anzahl von Vertauschungen zweier Nachbarn ist, und* -1 *sonst. Die Mengen* $\otimes^p_+ V$ *bzw.* $\otimes^p_- V$ *der symmetrischen bzw. alternierenden Tensoren sind Untervektorräume von* $\otimes^p V$*. Anregung: Konstruktion der "Besetzungszahlbasen" aus den Vektoren* $\Phi_{N_1,..,N_n}$ *mit* $N_1,..,N_n \in \mathbb{N}_0^n$ *bzw.* $N_1,..,N_n \in \{0,1\}^n$ *und* $\sum_{i=1}^n N_i = p$ *durch Symmetrisieren bzw. Antisymmetrisieren der Vektoren* $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}$*, wobei* $N_i(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}) := \sum_{j=1}^p \delta_{i,i_j}$ *angibt, wie oft der Vektor* e_i *im Produkt* $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}$ *als Faktor vorkommt.*

1.11 Integralkurven linearer Vektorfelder

Dieser Abschnitt behandelt die Berechnung von Kurven in einem Vektorraum, deren Tangentenvektoren in jedem Bildpunkt der Kurve mit dem Wert eines vorgegebenen Vektorfeldes übereinstimmen. Der Problemkreis wird auch unter dem Titel "autonome Systeme gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen erster Ordnung" geführt. Integralkurven nichtlinearer Vektorfelder werden in der Vorlesung MPII behandelt. Alle Integralkurven eines Vektorfeldes zusammen ergeben den Fluß eins Vektorfeldes. Einsicht in die Flüsse von Vektorfeldern ist für ein Verständnis vieler physikalischer Erscheinungen unumgänglich, da nahezu alle fundamentalen Naturgesetze Aussagen über die Tangentialapproximationen von Funktionszusammenhängen enthalten. Zur Einstimmung ein einfachstes Beispiel.

Beispiel 29 *Laub treibt an der Oberfläche eines ruhigen Flusses. Eine Filmaufnahme hält die Örter einiger Blätter während einiger Minuten fest. Jedes Blatt legt im Laufe einer Sekunde eine (nahezu) gerade Strecke mit konstanter Geschwindigkeit zurück. Falls(!) diese Geschwindigkeiten ein zeitlich konstantes Vektorfeld auf der Wasseroberfläche ergeben, kann aus der Kenntnis der ersten Sekunde des Filmes, also aus der Kenntnis des Geschwindigkeitsvektorfeldes, auf den gesamten weiteren Verlauf des Filmes geschlossen werden. Von jedem Blatt kann berechnet werden, wo es nach ein paar Minuten ist. Das zu lösende mathematische Problem ist die Berechnung von Kurven, d. h. von "Wann-Wo Protokollen", deren Tangentialapproximationen überall und zu jeder Zeit auf die erste Filmsekunde passen.*

Auch in weniger geometrischen Zusammenhängen stellt sich in der Physik oft die Frage nach Kurven, deren Tangentialapproximationen reglementiert sind.

Beispiel 30 *Das radioaktive Zerfallsgesetz etwa behauptet folgendes. Die Menge (in Mol) einer radioaktiven Substanz, die in einem Stück Materie enthalten ist, ändert sich als Funktion der Zeit in linearer Approximation gemäß folgender Regel (radioaktives Zerfallsgesetz)*

$$(d_t N)(\tau) = -\lambda \tau N(t). \tag{1.38}$$

Hier ist $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ (Zerfallskonstante). Die Tangentialapproximation der Funktion N an der Stelle t ist durch den Wert der Funktion festgelegt. Um diese Aussage ohne (die schwierig zu erlangende) Kenntnis von $N(t)$ zu überprüfen, kann so vorgegangen werden. Die Zahl der Zerfälle im Zeitintervall $(t_1, t_1 + \tau)$ wird für einige Werte von τ mittels Geigerzähler gemessen und mit $N(t_1) - N(t_1 + \tau)$ identifiziert. Falls diese Zahlen von τ hinreichend gut linear abhängen, waren die τ-Werte genügend klein gewählt, und es ist der Anstieg der Tangentialapproximation von N bei t_1, die Zahl $\dot{N}(t_1) := (d_{t_1} N)(1)$, gegeben. ($-\dot{N}(t_1)$ heißt "Aktivität".) Wird diese Messung zu einer Zeit t_2 wiederholt, so ergibt sich ein Wert für $\dot{N}(t_2)$. Das radioaktive Zerfallsgesetz zieht für den Quotienten der Aktivitäten $\dot{N}(t_1)/\dot{N}(t_2) = N(t_1)/N(t_2)$ nach sich. Falls jedoch die Werte $N(t_1)$ und $N(t_1)$ nicht bekannt sind, ist damit alleine eine experimentelle Kontrolle des radioaktiven Zerfallsgesetzes nicht möglich.

Zu einer solchen wird stärkere Einsicht in den Quotienten $N(t_1)/N(t_2)$ benötigt. Mittels der Produktregel (MPI, Sect. 7.2, Satz 1) folgt aus dem radioaktiven Zerfallsgesetz für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} N(t)) = \lambda e^{\lambda t} N(t) + e^{\lambda t}(-\lambda N(t)) = 0.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{\lambda t} N(t)$ hat also an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches das Differential $d_t f = 0$. Aus der Vorlesung MPII ist bekannt, daß $d_t f = 0$ die Tatsache $f(t) = f(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ impliziert. Somit folgt $N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$ und daraus wiederum

$$\frac{\dot{N}(t_2)}{\dot{N}(t_1)} = \frac{N(t_2)}{N(t_1)} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Das Abklingen der Aktivität einer Probe folgt also einer Exponentialfunktion und die Messung der Aktivitäten zu den Zeiten t_1 und t_2 kann zur Bestimmung von γ mittels $\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \lg\left(\dot{N}(t_1)/\dot{N}(t_2)\right)$ genutzt werden. Jede weitere Messung von Aktivitäten läßt sich dann mit der Formel

$$\dot{N}(t) = \dot{N}(t_1) e^{-\lambda(t - t_1)}$$

berechnen, und das radioaktive Zerfallsgesetz wird überprüfbar.

Der entscheidende Schritt in Beispiel (30) ist die Einsicht, daß aus der für alle $t \in \mathbb{R}$ gültigen Gleichung $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$ für beliebige $t, t_1 \in \mathbb{R}$ die Relation

$$N(t) = N(t_1) e^{-\lambda(t - t_1)} \tag{1.39}$$

folgt. Es gilt also: Erfüllt eine Funktion $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die "Differentialgleichung" $\dot{N} = -\lambda N$, und ist ihr Wert an einer Stelle ihres Definitionsbereichs bekannt, dann ist die Funktion eindeutig bestimmt (und hier auch berechnet).

Um die Betrachtung von miteinender verkoppelten Differentialgleichungssystemen für mehrere reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu motivieren, ein weiteres Beispiel.

Beispiel 31 *Ein radioaktives Isotop 1 zerfällt mit der Zerfallskonstante λ_1 in ein Isotop 2, das selbst wiederum instabil ist und mit der Zerfallskonstante λ_2 weiterzerfällt. Die Mengen N_1 und N_2 der in einer (unbeieinflußten) Materialprobe vorhandenen Isotope 1 und 2 folgen als Funktionen der Zeit den Gesetzen $\dot{N}_1 = -\lambda_1 N_1$ und $\dot{N}_2 = -\dot{N}_1 - \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$. Es wird sich zeigen, daß die Funktionen N_1 und N_2 durch diese Gesetze nahezu vollkommen bestimmt sind. Das sieht man so.*

Bei Wahl der Zeitvariable $s := \lambda_1 t$ und $n_i(s) := N_i(t)$ sind die beiden Differentialgleichungen zum System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

mit $a := \lambda_2/\lambda_1 > 0$ äquivalent. Das System bekommt eine anschauliche geometrische Interpretation, wenn es als Suche nach einer Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 = V$ aufgefaßt wird, die dem auf V definierten Vektorfeld $X_A := \{(v, A(v)) \mid v \in V\}$ mit $M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ "folgt". Hier ist $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Eine diffbare Kurve γ "folgt" dem Vektorfeld zu A, falls für alle $s \in \mathbb{R}$ der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(s) := (d_s\gamma)(1)$ die Gleichung

$$\dot{\gamma}(s) = A(\gamma(s)) \tag{1.41}$$

erfüllt. Durch Zeichnen des Vektorfeldes und Vorgabe eines Punktes $v \in V$ mit $\gamma(s_1) = v$ läßt sich auch schon das Bild der Kurve qualitativ erahnen. Die Parameterwerte, bei denen die Kurve durch die Werte ihres Bildes "geht", sind jedoch nicht so leicht zu durchschauen. Dies gelingt mit etwas mehr Theorie, die zeigt, daß jede Lösung von Gleichung (1.41) für alle $s, s_1 \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\gamma(s) = e^{(s-s_1)A}(\gamma(s_1)) \tag{1.42}$$

erfüllt. Um aus dieser Beziehung numerische Aussagen über den Verlauf der Funktionen N_1 und N_2 abzulesen, ist genauere Einsicht in die linearen Abbildungen $e^{(s-s_1)A}$ zu erlangen. Insbesonders wird von Interesse sein, für welche Werte von s das Bild der Kurve γ im hier physikalisch zugänglichen Gebiet $n_1, n_2 \geq 0$ liegt. (Diese zusätzliche Bedingung kann durch entsprechende Einschränkung der Definitionsbereiche des Vektorfeldes X_A und der Lösungskuve γ berücksichtigt werden.)

Um einen Sachverhalt, wie er im obigen Beispiel zutage tritt, basisfrei formulieren zu können, ist der Begriff der Differenzierbarkeit -gegenüber der in MPI gegebenen Definition- auf Funktionen, deren Bildbereich ein beliebiger endlichdimensionaler VR ist, zu erweitern.

Definition 13 *Sei V ein K-VR mit $dim(V) < \infty$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Abbildung $\gamma : I \to V$ ("Kurve") heißt diffbar in $t \in I$, falls eine lineare Abbildung $d_t\gamma : \mathbb{R} \to V$ existiert, die*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \parallel \gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t) - d_t\gamma(\varepsilon) \parallel = 0$$

erfüllt. $\| \cdot \|$ ist eine beliebige Norm von V. Die Abbildung $d_t\gamma$ ist unabhängig von der Wahl von $\| \cdot \|$ und heißt das Differential von γ. Der Vektor $\dot{\gamma}(t) := (d_t\gamma)(1)$ heißt Tangentialvektor von γ in $\gamma(t)$. Die Kurve γ heißt diffbar, falls γ in allen $t \in I$ diffbar ist.

Bemerkung 50 *Eine Kurve γ ist durch ihr Bild $\gamma(I) \subset V$ ("Trajektorie von γ") nicht festgelegt. Aus dem Bild ist ja nicht ersichtlich, bei welchen Parameterwerten die Kurve durch ihre Bildpunkte geht. (Zwei Straßen können einander bekanntlich kreuzen, ohne daß deshalb zwei Autos, die selbige befahren notwendig miteinander kollidieren.)*

Bemerkung 51 *Vielfach wird der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ auch als "Geschwindigkeitsvektor" bezeichnet, da für viele Modellierungen von Bewegung nach vorangegangener Wahl eines Bezugssystems die physikalische Geschwindigkeit mit $\dot{\gamma}(t)$ übereinstimmt. Jedoch ist zu beachten, daß bei einer Beschreibung von Bewegung als Kurve mit Werten in einer vierdimensionalen Raumzeit die "mechanische" Geschwindigkeit einer solchen Kurve nicht mit ihrem Tangentialvektor übereinstimmt. Sie ergibt sich vielmehr als Summe von Tangentialvektor und einem nicht eindeutig bestimmten (bezugssystemsabhängigen) Hilfsvektor und ist somit durch die Kurve alleine nicht festgelegt. Auf diese Weise wird die "Relativität" der Geschwindigkeit einer Kurve, d. h. die Bezugnahme auf ein Inertialsystem, mathematisch explizit ausformuliert. (Genaueres dazu wird in der VL "Theoretische Mechanik" geliefert.)*

Satz 44 *Sei V ein K-VR mit Basis $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ und sei I ein offenes reelles Intervall. Dann gilt für eine Kurve $\gamma : I \to V$ und $t \in I$*

(i) γ ist diffbar in $t \Leftrightarrow U_{\underline{e}} \circ \gamma$ ist diffbar bei t im Sinn von MPI, Kap. 7.1.
(ii) Ist γ diffbar bei t, dann gilt $d_t\gamma = \underline{e} \cdot d_t(U_{\underline{e}} \circ \gamma) = \sum_{i=1}^n e_i d_t(U^i_{\underline{e}} \circ \gamma)$.

Beweis: Nachrechnen. □

Bemerkung 52 *Der Satz sagt also: Ist eine Kurve γ durch ihren Kartenausdruck $U_{\underline{e}} \circ \gamma$ bezüglich einer Basis $\underline{e}$ gegeben, so ergeben sich die Koordinaten von $\dot{\gamma}(t)$ aus*

$$U^i_{\underline{e}}(\dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt}(U^i_{\underline{e}} \circ \gamma)(t).$$

Beispiel 32 *Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\underline{e}$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = -te_2$ für $t < 0$ und $\gamma(t) = te_1 - t^2e_2$ für $t \geq 0$. (Bild!) Die Kurve ist für alle $t \in \mathbb{R} \setminus 0$ diffbar, nicht jedoch für $t = 0$. Es gilt $\dot{\gamma}(t < 0) = -e_2$ und $\dot{\gamma}(t > 0) = e_1 - 2te_2$. Die Trajektorie von γ setzt sich aus der positiven 2-Achse und einer Parabel im dritten Quadranten zusammen. Eine weitere Kurve sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \cos(\omega t)e_1 + \sin(\omega t)e_2$. Die Kurve ist diffbar und es gilt $\dot{\gamma}(t) = \omega\,(-\sin(\omega t)e_1 + \cos(\omega t)e_2)$. Ihre Trajektorie ist der Einheitskreis um den Nullpunkt.*

Um Differentialgleichungen zu Vektorfeldern formulieren zu können, die nicht auf ganz V definiert sind, wird der Begriff einer offenen Teilmenge von V benötigt.

Definition 14 *Eine Teilmenge U eines K-VR's endlicher Dimension heißt offen, falls für alle $v \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodaß alle $w \in V$ mit $\| v - w \| < \varepsilon$ in U enthalten sind. Die Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist hierbei eine beliebige Norm von V. (z. B. $\| v \| := \sqrt{U_{\underline{e}}(v)^+ \cdot U_{\underline{e}}(v)}$ für eine beliebige Basis $\underline{e}$.)*

Definition 15 *Sei V ein K-VR mit $\dim(V) < \infty$. Die Menge $U \subset V$ sei offen und I sei ein offenes reelles Intervall. Eine Abbildung $f : U \to V$ (entspricht einem Vektorfeld auf U) definiert das "autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen" $\dot{v} = f(v)$. Eine diffbare Kurve $\gamma : I \to U$ heißt Lösung von $\dot{v} = f(v)$, oder auch Integralkurve von f, falls für alle $t \in I$ die Gleichung*

$$\dot{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t) \tag{1.43}$$

gilt. Ist $U = V$, und ist f linear, dann heißt das System $\dot{v} = f(v)$ linear.

Bemerkung 53 *Daß ein Vektorfeld überhaupt Integralkurven besitzt, ist nicht ohne genauere Bedingungen an das Vektorfeld zu formulieren, sichergestellt. Im Fall eines linearen Vektorfeldes ist die Situation besonders durchsichtig, wie der folgende Satz (45) zeigt.*

Bemerkung 54 *Ist $\underline{e}$ eine Basis von V, dann wird durch $f^i_{\underline{e}} \circ U_{\underline{e}} := U^i_{\underline{e}} \circ f$ implizit der "Kartenausdruck" $f^i_{\underline{e}}$ von $U^i_{\underline{e}} \circ f$ definiert. Damit ist mit $\gamma^i := U^i_{\underline{e}} \circ \gamma$ die Gleichung (1.43) zum Gleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\gamma^i(t) = f^i_{\underline{e}}(\gamma^1(t), ..\gamma^n(t)) \tag{1.44}$$

äquivalent. Im Fall eines linearen Systems gilt insbesonders

$$\frac{d}{dt}(U_{\underline{e}} \circ \gamma)(t) = M(f, \underline{e}) \cdot (U_{\underline{e}} \circ \gamma)(t). \tag{1.45}$$

Satz 45 *Sei V ein K-VR mit $\dim(V) = n$ und sei $A : V \to V$ linear. Dann ist die Menge der Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to V$, die Lösungen der (linearen) Diffgleichung $\dot{v} = A(v)$ sind, ein n-dimensionaler K-VR (bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation) und es existiert für jedes $t_1 \in \mathbb{R}$ zu jedem $w \in V$ ("Anfangswert") genau eine Lösung γ mit $\gamma(t_1) = w$. Sie erfüllt $\gamma(t) = e^{(t-t_1)A}(w)$.*

Beweis: Siehe MPII? □

Bemerkung 55 *Wegen $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$ folgt für zwei Integralurven γ_1 und γ_2 von A mit $\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_1) \neq 0$ für alle $t \in R$ die Aussage $\gamma_1(t) - \gamma_2(t) \neq 0$. Zwei verschiedene Integralkurven schneiden sich also nicht. (Sehr wohl können dies aber ihre Trajektorien tun.)*

Bemerkung 56 *Die Abbildung $R : \mathbb{R} \to Hom_K(V, V), t \mapsto e^{tA}$ heißt Resolvente der Differentialgleichung $\dot{v} = A(v)$.*

Bemerkung 57 *(L. Euler) Eine intuitiv naheliegende Polygonzugapproximation $\gamma_N(t)$ für $\gamma(t)$ zur Integralkurve γ von A zu gegebenem Anfangswert w gewinnt man durch Hintereinanderschaltung von N Tangentialapproximationen $id_V + \frac{\tau}{N}A$ mit Parameterwert $\frac{\tau}{N} := \frac{(t-t_1)}{N}$*

$$w \mapsto w + \frac{\tau}{N}A(w) =: w_1 \mapsto w_1 + \frac{\tau}{N}A(w_1) \mapsto ... \mapsto (id_V + \frac{\tau}{N}A)^N(w) =: \gamma_N(t).$$

Es gilt nämlich (ohne Beweis)

$$\lim_{N\to\infty}(id_V + \frac{\tau}{N}A)^N(w) = e^{\tau A}(w). \tag{1.46}$$

Man vergleiche mit der Formel $e^x = \lim_{N\to\infty}(1 + \frac{x}{N})^N$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 58 *Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times V \to V, (t, v) \mapsto e^{tA}(v)$ heißt Flußabbildung zum linearen Vektorfeld A. In vielen physikalischen Zusammenhängen heißt $\Phi(t, \cdot)$ auch Zeitevolution von der Anfangszeit 0 zur Zeit t. Die eindeutige Integralkurve γ von A zum Anfangswert $\gamma(t_1) = v$ ist also durch $\gamma(t) = \Phi(t - t_1, v)$ gegeben. Ist $\underline{e} = (e_1, ..e_n)$ Basis von V, dann heißen die n Kurven $\gamma_i := \Phi(\cdot, e_i)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $\dot{v} = A(v)$. Für jede Integralkurve γ von A existiert genau ein Element $(v^1, ..v^n) \in K^n$ mit $\gamma(t) = \sum_{i=1}^n v^i \gamma_i(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Im Beispiel des radioaktiven Zerfalls ist $V = \mathbb{R}$ und $f = -\lambda_1 id_{\mathbb{R}}$ und die Flußabbildung erfüllt $\Phi(t, c) = e^{-\lambda t} c$.*

Beispiel 33 *Der Fluß zur 2-dimensionalen radioaktiven Zerfallskette ist gesucht.*

Lösung: *Dazu ist die lineare Abbildung e^{sA} für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit*

$$M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

mit $a > 0$ zu berechnen. ($\underline{e}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$). Man beachtet zunächst, daß für einen Eigenvektor v von A zu einem Eigenwert c wegen $A^n(v) = c^n v$ die Beziehung $e^{sA}(v) = e^{sc} v$ folgt. Das Eigenwertspektrum von A ergibt sich für $a \neq 1$ zu $Spec(A) = \{-1, -a\}$ und für $a = 1$ gilt $Spec(A) = \{-1\}$. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist

$$\ker(A - (-1) id_V) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} a - 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.48}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $-a$ ist

$$\ker(A - (-a) id_V) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

Für $a = 1$ sind die beiden Eigenräume identisch und V hat dann keine Basis aus Eigenvektoren von A. Zunächst wird der Fall $a \neq 1$ weiterverfolgt. Wird für $a \neq 1$ die Basis aus Eigenvektoren

$$\underline{f} := (f_1, f_2) = (e_1, e_2) \cdot \begin{pmatrix} a - 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =: \underline{e} \cdot M$$

gewählt, dann folgt für beliebiges $v \in V$ mit $v = \underline{f} \cdot U_{\underline{f}}(v)$

$$e^{sA}(v) = \underline{f} \cdot \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-as} \end{pmatrix} \cdot U_{\underline{f}}(v) = \underline{e} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-as} \end{pmatrix} \cdot M^{-1} \cdot U_{\underline{e}}(v).$$

Die Matrix von e^{sA} bezüglich $\underline{e}$ ergibt sich somit für $a \neq 1$ zu

$$M(e^{sA}, \underline{e}) = M \cdot \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-as} \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ \frac{e^{-s} - e^{-as}}{a-1} & e^{-as} \end{pmatrix}.$$

Für den Anfangswert $v = n_1(0)e_1 + n_2(0)e_2$ folgt daraus

$$\begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix} = e^{sA}(v) = \begin{pmatrix} n_1(0)e^{-s} \\ \frac{n_1(0)(e^{-s} - e^{-as})}{a-1} + n_2(0)e^{-as} \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Damit ist der Fluß Φ des Vektorfeldes zu A für $a \neq 1$ explizit berechnet.

Der physikalisch interpretierte Bereich von Funktionswerten n_1 und n_2 ist

$$U_p := \{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq 0, n_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Im allgemeinen ist die Trajektorie einer Lösungskurve $\gamma : \mathbb{R} \to V$ nicht in U_p enthalten, wie der Fall $n_1(0) > 0, n_2(0) = 0$ für $s < 0$ illustriert. Wird der Definitionsbereich des zu A gehörigen Vektorfeldes auf die offene Menge $U := \{(n_1, n_2) \mid n_1 > 0, n_2 > 0\}$ eingeschränkt, ist somit klar, daß die Lösungen des zugehörigen Differentialgleichungssystems im allgemeinen nur auf einem von Lösung zu Lösung verschiedenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. $A|_U$ ist natürlich nicht linear.

Die Abbildung e^{sA} ist noch im Fall $a = 1$ zu berechnen. Ohne genauere Begründung wird vermutet, daß dieser Fall aus dem allgemeinen durch Grenzübergang $a \to 1$ hervorgeht. Es gilt

$$\lim_{a\to 1} M(e^{sA}, \underline{e}) = \lim_{a\to 1} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ \frac{e^{-s}(1-e^{(1-a)s})}{a-1} & e^{-as} \end{pmatrix} = e^{-s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Zur Probe werden einerseits die Tangentialvektoren der so vermuteten Kurven $e^{sA}(e_i)$ berechnet. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left((e_1,e_2)\cdot e^{-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\right) &= (e_1,e_2)\cdot\left(-e^{-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} + e^{-s}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= -e^{-s}(e_1,e_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s-1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich das Vektorfeld A längs der vermuteten Kurven zu

$$\begin{aligned} A\left((e_1,e_2)\cdot e^{-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\right) &= (e_1,e_2)\cdot\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot e^{-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{-s}(e_1,e_2)\cdot\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1-s & -1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Die vermuteten Kurven sind also tatsächlich Integralkurven des Vektorfeldes A. Damit ist auch im Fall $a = 1$ der Fluß gefunden

$$\begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix} = e^{-s}\begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_1(0)s + n_2(0) \end{pmatrix}. \tag{1.52}$$

Der Fall $a = 1$ kann aber auch ohne Kenntnis der Integralkurven zu $a \neq 1$ verstanden werden. Und zwar so. Für $a = 1$ hat die lineare Abbildung A nur den Eigenwert -1 und den zugehörigen eindimensionalen Eigenraum $\mathbb{R}\cdot e_2$. Wegen $(A-(-1)id_V)(e_1) = e_2$ und $(A-(-1)id_V)(e_1) = 0$ gilt $(A+id_V)^2 = 0$ und daher $e^{sA} = e^{-s}e^{s(A+id_V)} = e^{-s}(id_V + s(A+id_V))$. Wegen

$$M(id_V + s(A+id_V), \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

ist damit Formel (1.52) für den Fluß reproduziert.

Der folgende Satz gibt das Muster der Berechnung der Flußabbildung eines linearen Vektorfeldes an, falls eine Basis von V existiert, die aus Eigenvektoren der zum Vektorfeld gehörigen linearen Abbildung besteht. Er reduziert die Berechnung von $\Phi(s,v)$ auf die Lösung eines Eigenwertproblems und die Berechnung der Koordinatenfunktionen zur Basis aus Eigenvektoren.

Satz 46 *Sei V ein K-VR mit $\dim(V) = n$. Die Abbildung A sei linear und V besitze eine Basis $\underline{e} = (e_1,..,e_n)$ aus Eigenvektoren von A, d. h. es gilt $A(e_i) = \lambda_i e_i$ für $\lambda_i \in K$. Dann gilt für $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$*

$$e^{tA}(v) = \sum_{i=1}^n v^i e^{t\lambda_i} e_i. \tag{1.53}$$

Beweis: Aufsummieren der Exponentialreihe. □

Bemerkung 59 *Falls eine lineare Abbildung nicht genügend viele Eigenvektoren hat, um eine Basis ("Eigenbasis") zu bilden, ist obiger Satz zur Berechnung des Flusses zu A nutzlos. Dies tritt insbesonders für $\mathbb{R}$-VRe häufig auf. In diesem Fall hilft manchmal ein simpler Trick. Hat eine lineare Abbildung A auf einem reellen VR keine Eigenbasis, kann(!) ihre Komplexifizierung A^c eine besitzen. Falls dem so ist, berechnet man den Fluß zu A^c mit obiger Formel und schränkt ihn auf reelle Anfangswerte ein. Die so erhaltenen Integralkuven verlaufen im reellen Unterraum des komplexifizierten Problems. Genau diese Vorgangsweise ist im Fall der Drehungen mit den komplexen Polarisationsvektoren realisiert. Siehe Übungsblatt 1), Bsp. 4). Im allgemeinen besitzt jedoch auch eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung keine Eigenbasis. Ein Beispiel dafür liefert die komlexifizierte radioaktive Zerfallskette mit $a = 1$. Das Muster, nach dem in einem solchen Fall grundsätzlich vorgegangen werden kann, ist das folgende. Man berechne einen*

maximalen Satz linear unabhängiger Eigenvektoren $v_1, ...v_k$ von A^c. Zu jedem Eigenvektor v_i mit $A^c(v_i) = \lambda_i v_i$ bestimmt man dann die maximale Zahl (verallgemeinerter) Eigenvektoren $v_{i,j}$ mit $j \in \{1, ..n(i)\}$ durch Lösen der Gleichungen $(A^c - \lambda_i id_{V^c})\, v_{i,j} = v_{i,j-1}$, wobei $v_{i,0} := v_i$ gesetzt wird. Das Verfahren bricht bei $v_{i,n(i)}$ ab und produziert eine Basis von V^c, wenn es für alle Eigenvektoren v_i durchgezogen ist. Es gilt dann offenbar

$$e^{tA^c}(v_{i,j}) = e^{\lambda_i t} e^{t(A^c - \lambda_i)}(v_{i,j}) = e^{\lambda_i t}(v_{i,j} + t v_{i,j-1} + \frac{t^2}{2!} v_{i,j-2} + ... \frac{t^j}{j!} v_i)$$

sodaß $e^{tA}(w)$ mittels der Zerlegung $w = \sum_{i,j} w^{i,j} v_{i,j}$ für beliebiges $w \in V^c$ zu berechnen ist.

Die Begründung dieser Vorgangsweise liefert der folgende Satz.

Satz 47 **Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit $\dim(V) = n$. Die Abbildung $A : V \to V$ sei linear. Dann existiert eine Basis $\underline{e} = (e_1, .., e_n)$ von V, natürliche Zahlen $n_1, ..n_k$ mit $n_1 + .. + n_k = n$ und komplexe Zahlen λ_i, sodaß gilt*

$$M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & .. & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & .. & 0 \\ & & .. & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet $J_n(\lambda) \in M(n, n, \mathbb{C})$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Jordanmatrix

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & .. & 0 \\ & & & .. & \\ 0 & .. & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wird weggelassen. (z. B. W. Klingenberg, Lineare Algebra und Geometrie, Springer 1990) □

Korollar 48 **Es gilt*

$$M(e^{sA}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} e^{sJ_{n_1}(\lambda_1)} & 0 & .. & 0 \\ 0 & e^{sJ_{n_2}(\lambda_2)} & .. & 0 \\ & & .. & \\ & & & e^{sJ_{n_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix},$$

$$e^{sJ_n(\lambda)} = e^{\lambda s} \begin{pmatrix} 1 & s & \frac{s^2}{2!} & .. & \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & s & .. & \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} \\ & 0 & 1 & .. & \frac{s^{n-3}}{(n-3)!} \\ & .. & & & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 34 *Die Bestimmung der Integralkurven eines reellen linearen Vektorfeldes wird am Fall einer gedämpften Schwingung vorgeführt. An diesem Beispiel können je nach Werten der Modellparameter die Fälle zunehmender Schwierigkeit illustriert werden: Berechnung von e^{tA} mittels (1) reeller Eigenbasis von A, (2) komplexer Eigenbasis von A^c, (3) verallgemeinerter Eigenbasis von A^c.*

Der orientierte Abstand eines eindimensionalen Schwingers von seiner Ruhelage ("Auslenkung") wird zur Zeit t mit $x(t)$ bezeichnet. Die Abbildung $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ erfüllt die gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m \frac{d^2}{dt^2} \xi = -2\rho \frac{d}{dt} \xi - m\omega^2 \xi. \tag{1.54}$$

Die reellen Modellparameter Reibungskoeffizient ρ, Masse m und Frequenzparameter ω erfüllen $\rho \geq 0, m > 0, \omega > 0$. Die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s := \omega t \mapsto x(t)$ erfüllt dann wegen $d_t \xi = \omega d_s y$ mit $y'(s) := \frac{d}{ds} y(s)$, $y''(s) := \frac{d^2}{ds^2} y(s)$ die Gleichung

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0. \tag{1.55}$$

Hier ist $\alpha := \frac{\rho}{m\omega} \geq 0$. *Die Einschränkung* $\alpha \geq 0$ *ist physikalisch begründet. Für manche Überlegungen wird jedoch auch Einsicht in den Fall* $\alpha < 0$ *von Bedeutung. Dieser macht aber keine komplizierten, neuen Rechnungen nötig, denn die bijektive, lineare Abbildung* $\theta : Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *mit* $(\theta y)(t) := y(-t)$ *("Zeitspiegelung") bildet für beliebiges* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die Lösungsmenge* L_α *von* (1.55) *auf* $L_{-\alpha}$ *ab. Mit ihrer Hilfe kann die Lösung* $y \in L_{\alpha<0}$ *des Anfangswertproblems* $y(t_1) = v$ *aus der Lösung* $\tilde{y} \in L_{-\alpha>0}$ *des Anfangswertproblems* $\tilde{y}(-t_1) = v$ *mittels* $\theta(\tilde{y})$ *berechnet werden.*

Gleichung (1.55) *wird nun in ein System erster Ordnung umgeformt. Sei* $\underline{e}$ *die Standardbasis von* $V = \mathbb{R}^2$. *Die Abbildung* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, s \mapsto y(s)e_1 + y'(s)e_2$ *ist dann Lösung der Differentialgleichung* $\dot{v} = A(v)$ *mit der linearen Abbildung* A, *deren Matrix zur Basis* $\underline{e}$ *durch*

$$M(A,\underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\alpha \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

gegeben ist. (Bild des Vektorfeldes zu A, *Fallunterscheidungen!)*

(i) *Für* $\alpha = 0$ *(keine Reibung) ist die Resolvente* $R : s \mapsto e^{sA}$ *aus dem Abschnitt über 2-dim Drehungen (-etwa mittels der komplexen Eigenbasis aus Polarisationsvektoren berechnet-) wohlbekannt. Es gilt*

$$M(e^{sA},\underline{e}) = \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix},$$

woraus für die Lösung γ *zum Anfangswert* $\gamma(0) = y(0)e_1 + y'(0)e_2$ *folgt, daß* $\gamma(s)$ *den Kreis um Null durch* $\gamma(0)$ *im Uhrzeigersinn mit Winkelgeschwindigkeit* 1 *durchläuft. Genauer gilt*

$$y(s) = U^1_{\underline{e}}(\gamma(s)) = y(0)\cos(s) + y'(0)\sin(s).$$

Für $\xi(t)$ *ist daraus abzulesen*

$$\xi(t) = \xi(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{\xi}(0)}{\omega}\sin(\omega t). \tag{1.57}$$

Die Trajektorie der Kurve

$$t \mapsto \xi(t)e_1 + \dot{\xi}(t)e_2 = (e_1,e_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y(\omega t) \\ y'(\omega t) \end{pmatrix}$$

ist eine Ellipse (in Hauptlage). Sie entsteht aus dem von γ *durchlaufenen Kreis durch Streckung der* 2*-Achse mit dem Faktor* ω.

(ii) *Nun wird der Fall* $\alpha > 1$ *(starke Reibung) weiterverfolgt. Die Eigenwerte von* A *ergeben sich aus den (reellen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms von* A, *nämlich* $\lambda \mapsto \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1 = 0$. *Für* $\alpha > 1$ *folgt* $spec(A) = \{c_1, c_2\}$ *mit* $c_1 := -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, c_2 := -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$, *und es gilt* $c_1c_2 = 1$. *Für den physikalischen Parameterbereich* $\alpha > 1$ *sind beide Eigenwerte negativ und wegen* $c_1c_2 = 1$ *gilt* $c_2 < -1 < c_1 < 0$. *Die Eigenräume* $\ker(A - c_i id_V)$ *sind*

$$\begin{aligned} \ker(A - c_1 id_V) &= \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \\ \ker(A - c_2 id_V) &= \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine Eigenbasis zu A *ist somit*

$$\underline{f} := (f_1,f_2) = (e_1,e_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} =: (e_1,e_2)\cdot B.$$

Daraus folgt mit $B^{-1} = \frac{1}{c_2-c_1}\begin{pmatrix} c_2 & -1 \\ -c_1 & 1 \end{pmatrix}$ *und* $M(e^{sA},\underline{e}) = B\cdot M(e^{sA},\underline{f})\cdot B^{-1} = B\cdot\begin{pmatrix} e^{sc_1} & 0 \\ 0 & e^{sc_2} \end{pmatrix}\cdot B^{-1}$ *die Matrix der Resolvente beim Parameterwert* s

$$M(e^{sA},\underline{e}) = \frac{1}{c_2-c_1}\begin{pmatrix} c_2e^{sc_1} - c_1e^{sc_2} & e^{sc_2} - e^{sc_1} \\ e^{sc_1} - e^{sc_2} & c_2e^{sc_2} - c_1e^{sc_1} \end{pmatrix}. \tag{1.58}$$

Die Lösung zum Anfangswert $\gamma(0) = y(0)e_1 + y'(0)e_2$ ist somit

$$y(s) = \frac{1}{c_1 - c_2}\left\{y(0)\left[c_1 e^{sc_2} - c_2 e^{sc_1}\right] + y'(0)\left[e^{sc_1} - e^{sc_2}\right]\right\}.$$

Als Linearkombination zweier Exponentialfunktionen des Typs $s \mapsto e^{-cs}$ mit jeweils $c > 0$ wächst für $\alpha > 1$ der Betrag von $y(s)$ für $s \to -\infty$ unbeschränkt (exponentiell) an. Für $s \to \infty$ strebt $y(s)$ dann gegen 0. Ferner hat y höchstens eine Nullstelle. Genau dann, wenn y eine Nullstelle hat, besitzt y auch ein lokales Extremum.

Für die Funktion ξ zu den Anfangswerten $\xi(0)$ und $\dot\xi(0)$ folgt daraus mit $\omega' := \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} < \frac{\rho}{m}$

$$\xi(t) = e^{-\frac{\rho t}{m}}\left\{\xi(0)\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\omega' t) + \cosh(\omega' t)\right] + \frac{\dot\xi(0)}{\omega'}\sinh(\omega' t)\right\}. \tag{1.59}$$

(iii) *Nun wird der Fall $0 < \alpha < 1$ (schwache Reibung) betrachtet. Das Spektrum von A ist leer. Daher wird A komplexifiziert zu A^c. Das Spektrum von A^c ergibt sich zu $spec(A^c) = \{c_1, c_2\}$ mit*

$$c_1 = -\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2}, \quad c_2 = -\alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Die beiden Eigenwerte liegen am komplexen Einheitskreis und sind zueinander konjugiert komplex. Ihr Realteil ist wegen $\alpha > 0$ negativ. Der Imaginärteil von c_1 ist positiv. Die Eigenräume von A^c ergeben sich zu

$$\ker(A^c - c_1 id_V) = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \ker(A^c - c_2 id_V) = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Formel (1.58) gilt auch für e^{sA^c}. Die (komplexe) Lösung $\gamma^c =: y^1 e_1 + y^2 e_2$ von $\dot\gamma^c = A^c(\gamma^c)$ zum Anfangswert $\gamma^c(0) = y(0)e_1 + y'(0)e_2$ ergibt sich wieder zu

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{c_1 - c_2}\left\{y(0)\left[c_1 e^{sc_2} - c_2 e^{sc_1}\right] + y'(0)\left[e^{sc_1} - e^{sc_2}\right]\right\} && \text{(1.60a)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left\{y(0)\,\mathrm{Im}(c_1 e^{sc_2}) + y'(0)\,\mathrm{Im}(e^{sc_1})\right\}. && \text{(1.60b)} \end{aligned}$$

Für reelle Anfangswerte $y(0)$ und $y'(0)$ ist die Lösung y reellwertig. Mit $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ so, daß $-c_1 = e^{-i\delta}$, folgt aus Gleichung (1.60b)

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{e^{-s\alpha}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left\{-y(0)\,\mathrm{Im}(e^{i(-\delta - s\sqrt{1-\alpha^2})}) + y'(0)\,\mathrm{Im}(e^{is\sqrt{1-\alpha^2}})\right\} \\ &= \frac{e^{-s\alpha}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left\{\begin{array}{c} y(0)\left[\sin(\delta)\cos(s\sqrt{1-\alpha^2}) + \cos(\delta)\sin(s\sqrt{1-\alpha^2})\right] \\ +y'(0)\sin(s\sqrt{1-\alpha^2}) \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Es gilt $\sin(\delta) = \sqrt{1-\alpha^2}$. Die Lösung ξ führt also eine gedämpfte Schwingung der Frequenz $\omega' := \omega\sqrt{1-\alpha^2} < \omega$ aus

$$\xi(t) = e^{-\frac{\rho}{m}t}\left\{\xi(0)\left[\cos(\omega' t) + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sin(\omega' t)\right] + \frac{\dot\xi(0)}{\omega}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sin(\omega' t)\right\}. \tag{1.61}$$

Die Schwingungsfrequenz ω' ist gegenüber jener der ungedämpften Schwingung, nämlich ω, verringert.

(iv) *Nun zum Fall $\alpha = 1$. Das Spektrum von A lautet $spec(A) = \{-1\}$ und der zugehörige Eigenraum ist $\ker(A - (-1)id_V) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Abbildung $X := A + 1id_V$ erfüllt $X^2 = 0$, sodaß für die Resolvente an der Stelle s die Gleichung $e^{sA} = e^{-s}e^{sX} = e^{-s}(id_V + sX)$ folgt. Also gilt wegen*

$$M(X, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$M(e^{sA}, \underline{e}) = e^{-s}\begin{pmatrix} 1+s & s \\ -s & 1-s \end{pmatrix}.$$

Die Lösung zum Anfangswert $\gamma(0) = y(0)e_1 + y'(0)e_2$ ist daraus zu

$$y(s) = e^{-s}\{y(0)(1+s) + sy'(0)\}$$

abzulesen und ergibt mit

$$\xi(t) = e^{-\omega t}\left\{\xi(0)(1+\omega t) + t\dot{\xi}(0)\right\}. \tag{1.62}$$

Damit sind alle Lösungen der positiv oder negativ gedämpften Schwingungsgleichung für den gesamten Parameterbereich $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ berechnet.

Übung 1 *Kontrollieren Sie, daß die angegebenen Funktionen ξ tatsächlich die jeweilige Schwingungsgleichung inklusive der Anfangsbedingungen erfüllen.*

Die Konzeption eines linearen Differentialgleichungssystems soll nun noch auf inhomogen lineare Systeme verallgemeinert werden.

Definition 16 *Sei V ein K-VR endlicher Dimension. $A : V \to V$ sei linear. Die Kurve $Q : \mathbb{R} \to V$ sei stetig. Dann heißt eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to V$, die für alle $t \in R$ die Gleichung $\dot{\gamma}(t) - A(\gamma(t)) = Q(t)$ erfüllt, eine Lösung des inhomogen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{v} - A(v) = Q$.*

Satz 49 *Sei V ein K-VR endlicher Dimension. $A : V \to V$ sei linear. Die Kurve $Q : \mathbb{R} \to V$ sei stetig. Dann gilt.*

(i) Die Lösungsmenge L_Q von $\dot{v} - A(v) = Q$ ist durch ein beliebiges Element $\gamma \in L_Q$ ("partkuläre Lösung") und die Lösungsmenge L_0 des Systems $\dot{v} - A(v) = 0$ mittels $L_Q = \gamma + L_0$ gegeben. (L_Q ist ein affiner Raum derselben Dimension wie V.)

(ii) Seien $t_1 \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ beliebig. Dann erfüllt die Lösung $\gamma \in L_Q$ zum Anfangswert $\gamma(t_1) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die Formel

$$\gamma(t) = e^{(t-t_1)}(v) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}(Q(s))\,ds. \tag{1.63}$$

Bemerkung 60 *Je nach Zusammenhang heißt Q "Inhomogenität", "Quelle", "äußere Kraft",... Der erste Term, $e^{(t-t_1)A}(v)$, in Gleichung (1.63) ist die Integralkurve zum Vektorfeld A und dem Anfangswert v (zur Zeit t_1). Der zweite Term, $\gamma_{t_1,0}(t) := \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}(Q(s))\,ds$ ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert 0 (zur Zeit t_1).*

Beweis: Zu (i): Sind γ_1 und γ_2 in L_Q, dann folgt

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{d}{dt}\gamma_1 - \frac{d}{dt}\gamma_2 = (A(\gamma_1) + Q) - (A(\gamma_2) + Q) = A(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Damit ist die Differenz zweier Kurven von L_Q ein Element von L_0. Mit $\gamma_1 = \gamma_2 + (\gamma_1 - \gamma_2)$ folgt dann die Behauptung. Zu (ii): Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in L_Q$ mit $\gamma_i(t_1) = v$. Dann gilt nach (i) $\gamma_1 - \gamma_2 \in L_0$ und $(\gamma_1 - \gamma_2)(t_1) = 0$. Daraus folgt $\gamma_1 = \gamma_2$, also die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. Daß die in Gleichung (1.63) angeführte Kurve in L_Q ist und $\gamma(t_1) = v$ erfüllt, ist nachzurechnen. □

Bemerkung 61 **Für $\dot{Q} \neq 0$ fällt das System $\dot{v} - A(v) = Q$ nicht in das von Definition (15) beschriebene Schema, da das Vektorfeld $A + Q(t) : V \to V, v \mapsto A(v) + Q(t)$ in t variiert. Durch den folgenden Trick kann die Gleichung jedoch auf ein solches (autonomes) Problem zurückgeführt werden. Betrachte den erweiterten (reellen!) Vektorraum $\mathbb{R} \times V$ mit den kanonischen Projektionen*

$$\begin{aligned} P_1 &: \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R} \times V, (t, v) \mapsto t, \\ P_2 &: \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R} \times V, (t, v) \mapsto v. \end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R} \times V$ wird das Vektorfeld

$$f_{ext} : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R} \times V, (t, v) \mapsto (1, A(v) + Q(t)),$$

also $f_{ext} = (1, A \circ P_2 + Q \circ P_1)$*, definiert. Die Integralkurven* γ_{ext} *des Vektorfeldes* f_{ext} *erfüllen dann für alle* $t \in \mathbb{R}$ *die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(P_1 \circ \gamma\right)(t) &= P_1(\dot{\gamma}_{ext}(t)) = 1, \\ P_2(\dot{\gamma}_{ext}(t)) &= A\left(P_2(\gamma_{ext}(t))\right) + Q(P_1(\gamma_{ext}(t))). \end{aligned}$$

Die Integralkurve γ_{ext} *von* f_{ext} *zur Anfangsbedingung* $\gamma_{ext}(t_1) = (t_1, v)$ *erfüllt* $P_1(\gamma_{ext}(t)) = t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*. Daraus wiederum folgt, daß* $P_2(\gamma_{ext}(t))$ *die Lösung* γ *von* $\dot{v} - A(v) = Q$ *zum Anfangswert* $\gamma(t_1) = v$ *ist.*

Bemerkung 62 **Falls(!) der punktweise Limes der partikulären Lösung* $\gamma_{t_1,0}$ *für* $t_1 \to -\infty$ *bzw. für* $t_1 \to \infty$ *existiert und mit der Differentiation vertauscht, ist auch* γ_{ret} *bzw.* γ_{av} *mit*

$$\gamma_{ret} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lim_{t_1 \to -\infty} \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\left(Q(s)\right) ds, \tag{1.64a}$$

$$\gamma_{av} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lim_{t_1 \to \infty} \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\left(Q(s)\right) ds \tag{1.64b}$$

Element von L_Q*. (Retardierte bzw. avancierte Lösung) Für eine Inhomogenität* Q *mit* $Q(t) = 0$ *für alle* t *mit* $|\, t \,| > N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ist dies etwa der Fall. In diesem Fall gilt* $\gamma_{ret}(t) = 0$ *für alle* $t < -N$ *und* $\gamma_{av}(t) = 0$ *für alle* $t > N$*. Der Wert* $\gamma_{ret}(t)$ *der retardierten Lösung zur Zeit* t *wird nur von der Vergangenheit der Quelle, d. h. von* $Q\,|_{\{s \in \mathbb{R}/s<t\}}$*und* $\gamma_{av}(t)$ *ähnlich von der Zukunft der Quelle geregelt.* γ_{ret} *ist jene Kurve, die unter dem Einfluß der Inhomogenität aus dem Nullvektor herausführt ("Anregungslösung"), und* γ_{av} *ist jene Kurve, die unter dem Einfluß der Inhomogenität in den Nullvektor einmündet ("Einbremslösung").*

Die aus der Resolvente mithilfe der Stufenfunktion $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$ *für* $x \geq 0$ *und* $x \mapsto 0$ *für* $x < 0$ *gebbauten Abbildungen*

$$\Gamma_{ret} : \mathbb{R} \to Hom_K(V,V), \quad t \mapsto \Theta(t)e^{tA}, \tag{1.65a}$$

$$\Gamma_{av} : \mathbb{R} \to Hom_K(V,V), \quad t \mapsto -\Theta(-t)e^{tA} \tag{1.65b}$$

heißen retardierter und avancierter Propagator und erfüllen

$$\gamma_{ret}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Gamma_{ret}(t-s)\right)\left(Q(s)\right) ds, \tag{1.66a}$$

$$\gamma_{av}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Gamma_{av}(t-s)\right)\left(Q(s)\right) ds. \tag{1.66b}$$

Beispiel 35 *(Zum Brüten radioaktiver Substanzen) Wasser werde mit Neutronen bestrahlt. Die Zahl der in einem Mol Wasser enthaltenen* H^3 *(Tritium) Kerne nimmt einerseits durch radioaktiven Zerfall ab und wird andererseits durch den Beschuß mit Neutronen angehoben. Wird die aufgrund zeitlich variierender Bestrahlung zeitabhängige Produktionsrate für* H^3 *mit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bezeichnet, dann gilt näherungsweise die Differentialgleichung* $\dot{N}(t) = -\lambda N(t) + f(t)$*. Mit* $s := \lambda t, n(s) := N(t)$ *und* $g(s) := \frac{f(t)}{\lambda}$ *folgt daraus die inhomogen lineare Differentialgleichung* $n' = -n + g$*. Ihre Lösung zum Anfangswert* $n(0)$ *ist nach Gleichung* (1.63) *und wegen* $R(s) = e^{-s}$

$$n(s) = n(0)e^{-s} + \int_0^s e^{-(s-s')} g(s') ds'. \tag{1.67}$$

Für den speziellen Fall $g(s) = g_0\left[c + \cos(\nu s)\right]$ *mit* $c > 1$ *gilt für die partikuläre Lösung*

$$\begin{aligned} \frac{n(s)}{g_0} &: = \int_0^s e^{-(s-s')} g(s') ds' = \int_0^s e^{-(s-s')} \Re\left(c + e^{i\nu s'}\right) ds' \\ &= \Re\left[e^{-s} \int_0^s \left(e^{(i\nu+1)s'} + c e^{s'}\right) ds'\right] = \Re \frac{e^{i\nu s} - e^{-s}}{i\nu + 1} + c\left(1 - e^{-s}\right) \\ &= \frac{\Re\left[(1 - i\nu)\left(e^{i\nu s} - e^{-s}\right)\right]}{1 + \nu^2} + c\left(1 - e^{-s}\right) = \frac{\cos(\nu s - \delta) - \cos(\delta) e^{-s}}{\sqrt{1 + \nu^2}} + c\left(1 - e^{-s}\right) \end{aligned}$$

mit $\delta := \arctan(\nu)$. *Daraus folgt*

$$N(t) = \left(n(0) - g_0\left(\frac{\cos(\delta)}{\sqrt{1+\nu^2}} + c\right)\right)e^{-\lambda t} + g_0\left(\frac{\cos(\nu\lambda t - \delta)}{\sqrt{1+\nu^2}} + c\right).$$

Der Beitrag der homogenen Lösung zu $N(t)$ *für* $\lambda t \gg 1$ *geht exponentiell gegen Null. Der Term*

$$g_0\left(\frac{\cos(\nu\lambda t - \delta)}{\sqrt{1+\nu^2}} + c\right)$$

dominiert das Langzeitverhalten von $N(t)$. *Die Periode der Neutronenstrahlung prägt sich der* H^3*-Konzentration auf. Die Maxima der* H^3*-Konzentration treten um die Zeit* $\Delta T := \frac{\delta}{\nu\lambda}$ *später als die Maxima der Bestrahlung auf. (Zahlenwerte sind:* $\lambda = (12.26\,[Jahre])^{-1} = 3,169.10^{-8}\left[s^{-1}\right]$ *und für* $\nu = 0,95$ *folgt* $\Delta T \approx 24\,[Tage]$.*) Das Beispiel hat auch Bedeutung für die Erzeugung von* C^{14} *in der Erdatmosphäre durch Beschuß mit solarer kosmischer Strahlung. Die Variation der atmosphärischen* C^{14}*-Konzentration aufgrund langfristiger Schwankungen der solaren Aktivität ist bei der* C^{14}*-Datierung biologischen Materials zu berücksichtigen. (Mißachtung dieser Einsicht war angeblich die Ursache für anfängliche Unstimmigkeiten zwischen verschiedenen Befunden zum Alter der Mumie vom Hauslabjoch.)*

Beispiel 36 *Der gedämpfte Schwinger von Beispiel* (34) *werde von einer zeitlich variablen Kraft* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *angetrieben. Seine Auslenkung aus der Ruhelage (als Funktion der Zeit) erfüllt dann die Differentialgleichung*

$$m\frac{d^2}{dt^2}\xi = -2\rho\frac{d}{dt}\xi - m\omega^2\xi + F. \tag{1.68}$$

Mit der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s := \omega t \mapsto g(s) := \frac{F(t)}{m\omega^2}$ *und* $y(s) := \xi(t)$ *ergibt sich für die Kurve* $\gamma = e_1 y + e_2 y'$ *das Differentialgleichungssystem*

$$\dot\gamma - A(\gamma) = e_2 g. \tag{1.69}$$

Die lineare Abbildung A *ist wie in Beispiel* (34). *Für den Fall* $F(t) = F(0)\cos(\nu\omega t)$ *soll die Lösungsmenge von Gleichung* (1.68) *bestimmt werden. Dazu genügt es wegen Gleichung* (1.63), *man beachte die Linearität von* $Q \mapsto \gamma_{s_1,0}$, *die partikuläre Lösung* $\gamma_{s_1,0}$ *von Gleichung* (1.69) *für die Inhomogenität* $g(s) = \cos(\nu s)$ *mit* $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *zu berechnen. Die retardierten und avancierten Limiten für* $s_1 \to \pm\infty$ *von* $\gamma_{s_1,0}$ *werden, soweit existent, berechnet.*

Dazu wird zunächst die partikuläre Lösung $\gamma^c_{s_1,0}$ *zur komplexen Inhomogenität* $Q(s) := e_2 e^{i\nu s}$ *(für beliebigen reellen Parameter* ν*) der komplexifizierten Differentialgleichung berechnet. Ihr Realteil und Imaginärteil erfüllen dann die Gleichungen* $\frac{d}{dt}\Re\gamma^c - A(\Re\gamma^c) = e_2\cos(\nu s)$ *und* $\frac{d}{dt}\Im\gamma^c - A(\Im\gamma^c) = e_2\sin(\nu s)$, *sodaß* $\gamma_{s_1,0} = \Re\gamma^c_{s_1,0}$ *folgt.*

Mit der in Beispiel (34) *abgeleiteten, für alle* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ *gültigen Formel für die Resolvente*

$$M(e^{sA^c}, \underline{e}) = \frac{1}{c_2 - c_1}\begin{pmatrix} c_2e^{sc_1} - c_1e^{sc_2} & e^{sc_2} - e^{sc_1} \\ e^{sc_1} - e^{sc_2} & c_2e^{sc_2} - c_1e^{sc_1}\end{pmatrix}$$

folgt für die partikuläre Lösung $\gamma^c_{s_1,0}$ *der komplexifizierten Gleichung* (1.69) *mit Quelle* $Q(s) := e_2 e^{i\nu s}, \nu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y^c_{s_1,0}(s) &= U^1_e\left(\int_{s_1}^s e^{(s-s')A}\left(e_2 g(s')\right)ds'\right) = \frac{1}{c_2-c_1}\int_{s_1}^s\left(e^{(s-s')c_2} - e^{(s-s')c_1}\right)e^{i\nu s'}ds' \\ &= \frac{e^{i\nu s}}{c_2-c_1}\left\{\frac{1}{i\nu - c_2} - \frac{1}{i\nu - c_1}\right\} + \frac{1}{c_2-c_1}\left\{\frac{e^{(i\nu-c_2)s_1}e^{c_2 s}}{c_2 - i\nu} - \frac{e^{(i\nu-c_1)s_1}e^{c_1 s}}{c_1 - i\nu}\right\}. \end{aligned}$$

Für $\alpha > 0$ *sind die Realteile von* c_1 *und* c_2 *negativ und für* $\alpha < 0$ *sind sie positiv. Daher existiert für den physikalisch realisierten Fall* $\alpha > 0$ *der punktweise Limes der Funktionenfamilie* $y^c_{s_1,0}$ *für* $s_1 \to -\infty$, *nicht aber jener für* $s_1 \to \infty$. *Die Grenzfunktion* $y^c_{ret} : s \mapsto \frac{e^{i\nu s}}{c_2-c_1}\left\{\frac{1}{i\nu-c_2} - \frac{1}{i\nu-c_1}\right\}$ *ist stetig diffbar und liegt in* L_Q, *ist also die retardierte Lösung. Analog ist für* $\alpha < 0$ *die avancierte Lösung* $y^c_{av} : s \mapsto \frac{e^{i\nu s}}{c_2-c_1}\left\{\frac{1}{i\nu-c_2} - \frac{1}{i\nu-c_1}\right\}$, *während die retardierte nicht existiert.*

Aus $c_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ *und* $c_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ *folgt unter Beachtung von* $c_1 c_2 = 1$ *durch Umformen auf gemeinsamen Nenner und Reellmachen des Nenners*

$$y^c_{ex}(s) = \frac{1 - \nu^2 - i2\alpha\nu}{(1-\nu^2)^2 + (2\alpha\nu)^2} e^{i\nu s} = \frac{e^{i(\nu s - \delta)}}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + (2\alpha\nu)^2}}. \tag{1.70}$$

Hier ist $\delta \in [0, 2\pi)$ *die (negative) Phase von* $1 - \nu^2 - i2\alpha\nu$*, d. h. es gilt*

$$1 - \nu^2 - i2\alpha\nu = \sqrt{(1-\nu^2)^2 + (2\alpha\nu)^2} e^{-i\delta}.$$

Die Funktion y^c_{ex} *ist die Funktion* y^c_{ret} *für* $\alpha > 0$ *und* y^c_{av} *für* $\alpha < 0$*. Für* $\alpha\nu > 0$ *gilt*

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1-\nu^2}{2\alpha\nu}\right)$$

und für $\alpha\nu < 0$ *gilt*

$$\delta = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1-\nu^2}{2\alpha\nu}\right).$$

Es gilt also

$$y_{ex}(s) = \Re y^c_{ex}(s) = \frac{\cos(\nu s - \delta)}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + (2\alpha\nu)^2}}.$$

Die analoge Rechnung im Fall $\alpha^2 = 1$ *führt für* $\alpha = 1$ *im Limes* $s_1 \to -\infty$ *und für* $\alpha = -1$ *im Limes* $s_1 \to \infty$ *auf die Funktion* y^c_{ex}*, die sich durch Spezialisierung von Gleichung* (1.70) *für* y^c_{ex} *auf* $\alpha^2 = 1$ *ergibt. (Der Beweis wird hier nicht vorgeführt.) Die retardierte partikuläre Lösung von*

$$m\frac{d^2}{dt^2}\xi + 2\rho\frac{d}{dt}\xi + m\omega^2\xi = F_0 \cos(\nu\omega t)$$

ist somit für alle reellen $\alpha > 0$ *und* $\nu > 0$ *durch*

$$\xi_{ret}(t) = \frac{\frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\nu\omega t - \delta)}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + (2\alpha\nu)^2}} \tag{1.71}$$

gegeben. Es ist $\delta := \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1-\nu^2}{2\alpha\nu}\right)$ *die Versetzung ("Phasenschub") zwischen Erregung und Schwingung. Für schwache Dämpfung,* $0 < \alpha < 1$ *hat die Amplitude der erzwungenen Schwingung* ξ_{ret} *als Funktion von* ν *ein ausgprägtes Maximum in der Nähe von* ± 1*. Die avancierte partikuläre Lösung existiert nicht.*

Im Fall des ungedämpften Oszillators, $\alpha = 0$*, existieren weder* y^c_{ret} *noch* y^c_{av} *zur* $e^{i\nu s}$*-Quelle. Es gilt nämlich für* $\nu^2 \neq 1$

$$\begin{aligned} y^c_{s_1,0}(s) &= U^1_e\left(\int_{s_1}^{s} e^{(s-s')A}\,(e_2 g(s'))\,ds'\right) = \int_{s_1}^{s} \sin(s-s')e^{i\nu s'}ds' \\ &= \ldots = \frac{e^{i\nu s}}{1-\nu^2} - \frac{e^{i\nu s_1}}{1-\nu^2}\left\{\cos(s-s_1) + i\nu\sin(s-s_1)\right\}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich im nichtresonanten Fall $\nu^2 \neq 1$ *jedoch Lösungen, die aus Gleichung* (1.70) *im Limes* $\alpha \searrow 0$ *aus* y_{ret} *und im Limes* $\alpha \nearrow 0$ *aus* y_{av} *entstehen. So ergibt sich etwa im physikalisch relevanten Grenzfall* $\lim_{\alpha\searrow 0}$ *für* $\nu > 0$

$$\lim_{\alpha\searrow 0} \xi_{ret}(t) = \frac{\frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\nu\omega t - \delta)}{\mid 1 - \nu^2 \mid} \tag{1.72}$$

Man beachte dabei, daß für $\nu > 0$ gilt

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \delta = \begin{cases} 0 & für \quad \nu < 1 \\ \pi & für \quad \nu > 1 \end{cases} .$$

Bemerkenswert an dieser Lösung $\lim_{\alpha \searrow 0} \xi_{ret}$ ist der Sprung im Phasenschub zwischen Auslenkung und Erregung bei Durchstimmung der Erregerfrequenz $\omega_{ext} := \nu\omega$ über den Resonanzpunkt $\nu = 1$. Die physikalische Bedeutung ist folgende. Die Auslenkung einer mit $\omega_{ext} < \omega$ mit $\cos(\omega t)$ getriebenen (sehr schwach gedämpften) Schwingung hat (nach Ausdämpfung des Einschwingvorgangs) ihre Maxima gleichzeitig mit der Erregung, während für $\omega_{ext} > \omega$ die Auslenkung während der Minima der Erregung maximal ist.

Der ungedämpfte resonante Fall $\alpha = 0, \nu^2 = 1$ verlangt eine eigene Rechnung. Zur Abkürzung wird gleich für die Quelle $Q(s) = e_2 \cos(s)$ gerechnet

$$y^c(s) = U^1_{\underline{e}} \left(\int_0^s e^{(s-s')A} (e_2 \cos(s') ds' \right) = \int_0^s \sin(s - s') \cos(s') = ... = \frac{s}{2} \sin(s).$$

Die partikuläre Lösung zu den Anfangswerten $\xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = 0$ von Gleichung (1.68) im Fall $\alpha = 0, \nu = \pm 1$ ist somit

$$\xi(t) = \frac{F_0}{2m\omega^2} \omega t \sin(\omega t). \tag{1.73}$$

Die lokalen Maxima dieser (aperiodischen!) Schwingung wachsen für $\mid t \mid \to \infty$ linear an.

Anhang A

Übungsbeispiele

1) Basiswechsel Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$. Die Vektoren (f_1, f_2) seien durch $f_1 = -e_1 + 2e_2$ und $f_2 = e_1 + e_2$ gegeben.

a) Warum ist $\underline{f} = (f_1, f_2)$ eine Basis von V? Sind $\underline{e}$ und $\underline{f}$ gleich orientiert? (Hinweis: Determinantenkriterium)

b) Sei $A : V \to V$ linear mit $A(e_i) = f_i$ für $i = 1, 2$. Welche Matrix $M(A, \underline{e})$ hat A bezüglich $\underline{e}$ und welche bezüglich $\underline{f}$?

c) Wie drückt sich die kontravariante Karte $U_{\underline{e}}$ von V durch $U_{\underline{f}}$ aus?

d) Welche kontravarianten Koordinaten hat e_1 bezüglich $\underline{f}$?

2) Innere Produkte Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ und innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Basis $\underline{f}$ sei wie in Bsp. 1).

a) Berechnen Sie für $G_{\underline{e}} = I_2$ die metrische Matrix $G_{\underline{f}}$. (Determinantenprobe machen!)

b) Welche kovarianten Koordinaten hat e_1 bezüglich $\underline{f}$?

c) Wenden Sie auf $\underline{f}$ das Gram-Schmidtverfahren an.

d) Welche der folgenden Matrizen sind als metrische Matrix $G_{\underline{e}}$ möglich, und welche definieren ein Skalarprodukt?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Berechnen Sie zu jeder in d) als metrische Matrix möglichen Matrix die zugehörige Matrix $G_{\underline{f}}$.

f) Berechnen Sie zu jeder in d) als metrische Matrix möglichen Matrix eine Normalbasis von V und vergleichen Sie, falls möglich mit dem Ergebnis des Gram-Schmidtverfahrens.

3) Die orthogonale Gruppe O_2 Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ und innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es gelte $G_{\underline{e}} = I$.

a) Zeigen Sie, daß die Menge O_2 der linearen Abbildungen $A : V \to V$ mit

$$M(A, \underline{e}) \in \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

eine nichtkommutative Untergruppe von $GL_{\mathbb{R}}(V)$ ist.

b) Welche $A \in O_2$ sind orientierungserhaltend? Zeigen Sie, daß diese eine kommutative Untergruppe von O_2, die sogenannte SO_2 bilden.

c) Bestimmen Sie jene lineare Abbildung L, die für $\theta \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$M(e^{\theta L}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

L heißt infinitesimale Drehung oder Drehgenerator.

Hinweis: Differenzieren Sie $M(e^{\theta L}, \underline{e})$ bei $\theta = 0$ nach θ und verifizieren Sie den so erhaltenen Ausdruck für $M(L, \underline{e})$ durch Aufsummieren der Exponentialreihe $e^{\theta L} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(\theta L)^n}{n!}$. Hier ist $(\theta L)^n = \theta^n L^n$, wobei L^n die n-fache Hintereinanderausführung von L bedeutet.

4) Ein komplexer Vektorraum: zirkulare Polarisationsbasis Sei $V^c = \mathbb{C}\cdot e_1 + \mathbb{C}\cdot e_2$ die Komplexifizierung von V aus Bsp. 3). Das Skalarprodukt von V aus Bsp. 3) ist eindeutig zu einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle^c$ auf V^c fortsetzbar. Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : V \to V$ hat eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $A^c : V^c \to V^c$. Seien A^c und B^c die Fortsetzungen von $A \in SO_2$ und $B \in O_2\backslash SO_2$ mit

$$\begin{aligned} M(A^c, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \\ M(B^c, \underline{e}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Überlegen Sie, daß für die Fortsetzung X^c einer beliebigen linearen Abbildung $X : V \to V$ für alle $v \in V^c$ gilt: $\Re\left(X^c(v)\right) = X\left(\Re(v)\right)$, wobei der Realteil eines Vektors $v \in V^c$ durch

$$\Re(v) = \frac{v + v^*}{2}, \quad (cv)^* = \bar{c}v^*, \quad e_i^* = e_i$$

eindeutig bestimmt ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A^c und B^c. Registrieren Sie insbesonders

$$\left(e^{\theta L}\right)^c \varepsilon_\pm = e^{\mp i\theta}\varepsilon_\pm \text{ für } \varepsilon_\pm = \frac{e_1 \pm ie_2}{\sqrt{2}}. \tag{A.1}$$

c) Schließen Sie aus Gl. (A.1) für $x^\pm, \theta_\pm \in \mathbb{R}$ auf

$$\sqrt{2}\Re\left[e^{-i\theta_+}x^+\varepsilon_+ + e^{-i\theta_-}x^-\varepsilon_-\right] = \left[x^+e^{\theta_+ L} + x^-e^{-\theta_- L}\right](e_1).$$

Diese Formel spielt bei der Zerlegung transversaler Wellen in einen links- und einen rechtsdrehenden Anteil die entscheidende Rolle.

d) Ist $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ eine Basis von V^c? Wie lautet die metrische Matrix $G_{\underline{\varepsilon}}$? Registrieren Sie die Übereinstimmung von ko- und kontravarianten Koordinaten zu $\underline{\varepsilon}$.

e) Sind A^c, B^c Invarianzen von $\langle\cdot,\cdot\rangle^c$?

5) Physikalische Realisierung von $A \in O_2$ mit $\det A = -1$ Welche Abbildung beschreibt die Richtungsänderung, die ein Lichtstrahl erfährt, der auf einen ebenen Spiegel fällt? Nehmen Sie an, daß einfallender und auslaufender Strahl und die Normalenrichtung des Spiegels in einer Ebene liegen. Modellieren Sie deshalb die Menge der möglichen Lichteinfallsrichtungen mithilfe eines zweidimensionalen $\mathbb{R}$-VR's mit Skalarprodukt.

6) Winkelgeschwindigkeit An einem Ort am Äquator soll am 21. März ein Spiegel um eine in horizontaler Nord-Süd Richtung verlaufende (innerhalb des Spiegels liegende) Achse tagsüber so gedreht werden, daß Sonnenlicht zu jeder Zeit t zwischen Sonnenauf- und Sonnenuntergang horizontal in westliche Richtung umgelenkt wird. Welche Kurve $\gamma : [0, ?] \to O_2$ beschreibt die Abfolge der vom Spiegel erzeugten Abbildungen, wenn $\gamma(t)$ die Abbildung ist, die der Spiegel t Sekunden nach Sonnenaufgang realisiert? Berechnen Sie eine Kurve ρ mit Werten in SO_2, sodaß $\forall t$ gilt:

$$\gamma(t) = \rho(t) \circ \gamma(0) \circ \rho(t)^{-1}.$$

Zeigen Sie weiter, daß mit dem Drehgenerator L aus der Vorlesung für ein $\omega \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\dot{\gamma}(t) \circ \gamma(t)^{-1} = \omega L$ gilt und geben Sie den Wert $\mid \omega \mid$ der "Winkelgeschwindigkeit" des Spiegels an. Von welcher (der Angabe nicht zu entnehmenden) Konvention hängt das Vorzeichen von ω ab?

7) Elementare Physik ist nicht unbedingt "linear" Ein Lichtstrahl tritt aus Luft an einer ebenen Grenzfläche ins Wasser. Das Snellius'sche Brechungsgesetz formuliert eine Funktion, die der Ausbreitungsrichtung in Luft jene im Wasser zuordnet. Ist diese Abbildung eine Einschränkung einer linearen?

8) Drehimpulsoperator Für ein $\varepsilon > 0$ sei die Funktion $f : (-\varepsilon, \infty) \to \mathbb{R}$ beliebig. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie $g := f \circ \| \cdot \|^2$: $V \to \mathbb{R}$ ist O_n invariant. Kontrollieren Sie im Fall einer diffbaren Funktion f und im Fall $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt das Ableitungskriterium in Richtung des Drehvektorfeldes für die Invarianz von g:

$$\mathcal{L}(g) = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})g = 0.$$

9) Drehinvariante Funktionen Sei V ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Orthonormalbasis $\underline{e}$. Welche der Abbildungen

$$f : V \to \mathbb{R}, v \mapsto a \langle e_1, v \rangle^\alpha + b \langle e_2, v \rangle^\beta$$

mit $a, b \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ sind invariant unter $A : V \to V, e_1 \mapsto e_2, e_2 \mapsto e_1$? Welche sind invariant unter SO_2?

10) Drehinvariante Funktionen von zwei Vektorvariablen ("Skalare und pseudoskalare Funktionen") Sei V ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Orthonormalbasis $\underline{e}$. Welche der folgenden Funktionen $f : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$

$$f(v, w) = a \langle v, v \rangle^\alpha + b \langle w, w \rangle^\beta + c \langle v, w \rangle^\gamma + d \left(\det \begin{pmatrix} \langle e_1, v \rangle & \langle e_1, w \rangle \\ \langle e_2, v \rangle & \langle e_2, w \rangle \end{pmatrix} \right)^\delta$$

sind invariant unter der Gruppenoperation

$$\mu(A, f) := f \circ (A^{-1} \times A^{-1}) : (v, w) \mapsto f(A^{-1}(v), A^{-1}(w))$$

für jeweils alle $A \in O_2$ beziehungsweise alle $A \in SO_2$?

11) *Zeitdilatation, Dopplereffekt und Lorentzkontraktion Sei $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ der zweidimensionale Minkowskivektorraum mit Orientierung und Zukunftskegel V_0^+ und sei $\underline{e}$ eine positiv orientierte zukunftsgerichtete Normalbasis von V. Für $\beta \in (-1, 1)$ und $v \in V$ umfaßt die Menge

$$P_{\underline{e}, \beta, v} := v + \mathbb{R} \cdot (e_0 + \beta e_1)$$

die von einem Partikel der konstanten Geschwindigkeit $c\beta$ bezüglich $\underline{e}$ eingenommenen Raumzeitpunkte. (c ist die Lichtgeschwindigkeit.) Die Menge

$$Z_{\underline{e}, \tau} := \tau e_0 + \mathbb{R} \cdot e_1$$

umfaßt die zu τe_0 bezüglich $\underline{e}$ gleichzeitigen Ereignisse. Die zwischen zwei Punkten $v, w \in V$ bezüglich $\underline{e}$ verstrichene Zeit ist $\frac{1}{c}(U^0_{\underline{e}}(v) - U^0_{\underline{e}}(w))$. Sei $A_\beta \in SO_+(1,1)$ mit

$$M(A_\beta, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und sei $\underline{f} = (A_\beta(e_0), A_\beta(e_1))$ für ein $\beta \in (-1,1)$.

a) Berechnen Sie jenes $\frac{\tau'}{c}$, für das $\tau e_0 \in Z_{\underline{f},\tau'}$ gilt. (Zahlenwert für $\frac{\tau}{c} = 2,2.10^{-6}\,[s]\,, \beta = 0,99$: Lebensdauer eines mit 99% der Lichtgeschwindigkeit laufenden Myons.)

b) Leiten Sie die relativistische Dopplerformel für Frequenzen ab:

$$\left(\frac{c}{\nu}\mathbb{Z}\cdot e_0 + V_0^+\right) \cap \mathbb{R}\cdot f_0 = \left(\frac{c}{\nu'_+} \cdot \mathbb{N} \cdot f_0\right) \cup \left(-\frac{c}{\nu'_-} \cdot \mathbb{N} \cdot f_0\right) \cup \{0\}\,,$$

$$\nu'_\pm := \nu\sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}.$$

c) Berechnen Sie für $l \in \mathbb{R}_{>0}$ die Komponente $\Pi(le_1) =: l' f_1$ von le_1 im Raum $\mathbb{R}\cdot f_1$ bezüglich der Zerlegung $V = \mathbb{R}\cdot e_0 + \mathbb{R}\cdot f_1$. Zeigen Sie damit

$$l' = l\sqrt{1-\beta^2}.$$

1. Klausur Sei V ein zweidimensionaler reeller VR mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Weiter sei $\underline{e} = (e_1, e_2)$ eine ON-Basis von V. Eine zweite ON-Basis $\underline{f} = (f_1, f_2)$ habe die in der Skizze angedeutete Lage.

a) Geben Sie die Zerlegung der Vektoren f_1, f_2 in die Vektoren e_1, e_2 an. Wie lautet die Basiswechselmatrix X, die

$$\underline{f} = \underline{e} \cdot X$$

erfüllt?

b) Die Abbildung $A : V \to V$ sei die Spiegelung an $\mathbb{R} \cdot f_2$. Geben Sie die Matrix von A bezüglich der Basis $\underline{f}$ an.

c) Berechnen Sie die Matrix von A bezüglich der Basis $\underline{e}$. Wie lautet Zerlegung von $A(-e_1)$ und jene von $A(-e_2)$ in die Vektoren e_1, e_2? Tragen Sie $A(-e_1)$ und $A(-e_2)$ in der Skizze des Angabenzettels ein.

d) Zeigen Sie, daß $\underline{g} = (f_1, e_2)$ eine Basis von V ist.

e) Berechnen Sie die metrische Matrix $G_{\underline{g}}$. Ist $\underline{g}$ eine Orthonormalbasis?

f) Berechnen Sie die kovariante Koordinatenzeile $D_{\underline{g}}(f_2)$.

h) Berechnen Sie durch Indexziehen die kontravariante Koordinatenspalte $U_{\underline{g}}(f_2)$.

12) Metrischer Isomorphismus: Schwerkraft auf der schiefen Ebene

Der dreidimensionale reelle VR V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ beschreibe die im allgemeinen möglichen Verschiebungen eines Gegenstandes der Masse M aus einem Punkt der Erdoberfläche. Sei $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine ON-Basis von V. Der Vektor e_1 zeige horizontal nach Süden, e_2 zeige horizontal nach Osten und e_3 in den Zenith. Eine Ebene $W \trianglelefteq V$ falle in Richtung Süden mit einer Neigung von 30° ab und steige nach Osten mit 60° an. (Man denke etwa an den Gipfelhang des Solsteins.) Eine Basis $\underline{f} = (f_1, f_2)$ von W bestehe aus den Einheitsvektoren, f_1 (nach Süden) und f_2 (nach Osten). Die Energie, die (mindestens) aufzuwenden ist, um den Gegenstand um $v \in V$ zu verschieben, ist dann mit der Erdbeschleunigung $g(\approx 10\,[ms^{-2}])$, durch

$$\Phi(v) := gM\,\langle e_3, v\rangle\,,$$

gegeben. Der Vektor $F := -gMe_3$ beschreibt die Schwerkraft, die auf den Körper wirkt.

a) Für eingeschränkte Verschiebungen um $w \in W$ existiert ein $F_W \in W$, mit $\Phi(w) = -\langle F_W, w\rangle$. Der Vektor F_W legt die Richtung fest, in die ein Ball die Ebene hinunter zu rollen beginnt. Berechnen Sie die (kontravarianten) Koordinaten von F_W bezüglich $\underline{f}$.

b) Berechnen Sie $\parallel F_W \parallel$.

c) Welchen Winkel bilden F_W und f_1?

d) Welche Neigung hat der Hang? (Komplementärwinkel des Winkels zwischen $-F_W$ und e_3.)

Hinweis:

$$F_W = \sharp(-\Phi \mid_W) = -\underline{f} \cdot G_{\underline{f}}^{-1} \cdot \Phi(\underline{f})^+,$$

wobei $\sharp : W^* \to W$ der zu $\langle \cdot, \cdot \rangle \mid_W$ gehörige metrische Isomorphismus ist.

e) Berechnen Sie die Koordinaten von F_W bezüglich $\underline{e}$ dadurch, daß Sie F in eine Komponente in W und eine dazu senkrechte, proportional $n := f_1 \times f_2$ zerlegen:

$$F_W = F - \frac{n\,\langle n, F\rangle}{\parallel n \parallel^2}.$$

Kontrollieren Sie das Resultat von **a)**. Welcher Lösungsweg erscheint Ihnen einfacher?

13) Funktionen als Vektoren Sei V der VR der $\mathbb{C}$-wertigen Polynome vom Grad n auf $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Es gilt: $\underline{e} = (e_0, ..e_n)$ mit

$$e_i : [0,1] \to \mathbb{C}, e_i(x) := x^i$$

ist Basis von V.

a) Zeigen Sie, daß die zu $\underline{e}$ duale Basis $\underline{E}$ durch

$$E^i(v) = \frac{1}{i!}(\frac{d^i}{dx^i}v)(0)$$

gegeben ist. Es gilt also $v(x) = \underline{e} \cdot \underline{E}(v)$.

b) Welche Matrix hat $A : V \to V$ mit $(A(v))(x) = \frac{d}{dx}v(x)$ bezüglich $\underline{e}$? Ist A invertierbar?

c) Anregung für Unausgelastete: Verifizieren Sie, daß

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \langle v, w\rangle := \int_0^1 \overline{v(x)} w(x) dx$$

ein Skalarprodukt ist. Berechnen Sie die metrische Matrix $G_{\underline{e}}$. Schaffen Sie die Inversion? Welche Zerlegung hat die Linearform $\flat(e_i)$ bezüglich der dualen Basis $\underline{E}$ von V^*. Gelingt Ihnen die Zerlegung von $\sharp(E^i)$ bezüglich $\underline{e}$? Können Sie A^* berechnen?

14) Leiteroperatoren Sei V ein K-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ON-Basis $\underline{e} = (e_0, ..e_n)$. Die lineare Abbildung $a : V \to V$ sei durch $a(e_i) := \sqrt{i} e_{i-1}$ für alle $i \in \{1, ..n\}$ und $a(e_0) := 0$ definiert. Beweisen Sie $a^* \circ a = \sum_{i=0}^n i e_i \langle e_i, \cdot \rangle$ und

$$[a, a^*] = id_V - (n+1) e_n \langle e_n, \cdot \rangle .$$

15) Spektraldarstellung Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt und ON-Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$. Sei $\sigma_1 : V \to V$ linear mit

$$M(\sigma_1, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle in der Spektraldarstellung von σ_1 vorkommenden Objekte. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ auch $M(e^{-i\sigma_1 t}, \underline{e})$ einmal durch Aufsummieren der Exponentialreihe und dann über die Spektraldarstellung.

Rechnen mit Tensorprodukten

16) Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und ON-Basis $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ und sei W ein $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ und ON-Basis $\underline{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$. Für jedes $v := v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 \in V$ ist die lineare Abbildung $\sigma_v : W \to W$ durch ihre Matrix

$$M(\sigma_v, \underline{\chi}) = \begin{pmatrix} v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & -v^3 \end{pmatrix}$$

definiert. (Die Matritzen $M(\sigma_{e_i}, \underline{\chi}) =: \sigma_i$ heißen Paulimatritzen.) Zeigen Sie für den mittels eines Tensorproduktes $\pi : W \times W \to W \otimes W$ gebildeten Tensor

$$T := \chi_1 \otimes \chi_2 - \chi_2 \otimes \chi_1 \in W \otimes W$$

die Gleichung

$$\frac{\langle T, \sigma_v \otimes \sigma_w(T) \rangle_{W \otimes W}}{\langle T, T \rangle_{W \otimes W}} = - \langle v, w \rangle_V .$$

Hinweis: Aus $G_{\underline{\chi}} = I_2$ folgt $M(\sigma_v, \underline{\chi})^i_j = \langle \chi_i, \sigma_v(\chi_j) \rangle_W$.

17) Sei $W \otimes W$ wie in Bsp. 16. $\underline{w}$ sei eine beliebige Basis von W. Ein Tensor $T = \sum_{i,j} T^{i,j} w_i \otimes w_j \in W \otimes W$ heißt symmetrisch bzw. antisymmetrisch, falls die Tensorkoordinaten $T^{i,j}$ von T bezüglich der zu $\underline{w}$ gehörigen Produktbasis die Relationen $T^{i,j} = T^{j,i}$ bzw. $T^{i,j} = -T^{j,i}$ erfüllen. Zeigen Sie, daß die Mengen der anti/symmetrischen Tensoren Untervektorräume $(W \otimes W)_\pm$ von $W \otimes W$ sind. Hängen die Räume $(W \otimes W)_\pm$ von der Auswahl von $\underline{w}$ ab? Berechnen Sie $(W \otimes W)_\pm$ und $\dim (W \otimes W)_\pm$.

18) Sei V ein endlichdimensionaler K-VR. Zeigen Sie, daß für $\dim(V) > 1$ die Abbildung id_V bezüglich des Tensorproduktes $\pi : V \times V^* \to Hom_K(V, V)$ mit $(\pi(v, X))(w) := vX(w)$ "verschränkt" ist, d. h. nicht faktorisiert.

19) Entkopplung von Schwingungen mittels "Normalkoordinaten" Zwei Steine hängen an Schnüren vom Plafond. Sie sind durch eine schwache Feder miteinander verbunden. Haben die Steine voneinander den Abstand L, der mit dem Abstand der Aufhängungspunkte übereinstimmt, dann sei die Feder entspannt. Die Steine befinden sich in ("schwacher") Bewegung in Richtung ihrer Verbindungslinie bei Ruhelage. Werden die (orientierten) Abstände der Steine aus ihren Ruhelagen zur Zeit t mit $x^1(t)$ und $x^2(t)$ bezeichnet (siehe Bild), dann gilt für die Kurve $\xi : \mathbb{R} \to V := \mathbb{R}^2$ mit $\xi(t) := x^1(t)e_1 + x^2(t)e_2$ (näherungsweise) die Differentialgleichung $\frac{d^2}{dt^2}\xi(t) = B(\xi(t))$ mit der linearen Abbildung $B : V \to V$, die bezüglich der Standardbasis $\underline{e}$ von $\mathbb{R}^2$ die Matrix

$$M(B, \underline{e}) = \begin{pmatrix} -(a+b) & b \\ c & -(a+c) \end{pmatrix}$$

hat. Die Modellparameter a, b, c sind feste positive reelle Zahlen, die sich aus den Massen der Steine, den Längen der Schnüre, der Erdbeschleunigung und der Federkonstante ergeben.

a) Zu welchem Vektorfeld A ist die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to W := \mathbb{R}^4$ mit

$$\gamma(t) := x^1(t)w_1 + x^2(t)w_2 + \dot{x}^1(t)w_3 + \dot{x}^2(t)w_4$$

Integralkurve, wenn $\underline{w}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ ist. Geben sie $M(A, \underline{w})$ an. Können Sie e^{sA} durch Aufsummieren der Exponentialreihe berechnen? (Nicht zu lange versuchen, sondern weiterlesen!)

b) Zeigen Sie, daß $M(B, \underline{f})$ für $\underline{f} = \underline{e} \cdot N$ mit $N := \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$ diagonal ist. Welche Werte stehen in der Diagonale?

c) Zeigen Sie, daß die Koordinatenspalte $\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix} := U_{\underline{f}}(\xi(t))$ ("Normalkoordinaten") die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix} = M(B, \underline{f}) \cdot \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix}$$

erfüllt. Mit welchen Frequenzen schwingt das System. Inwiefern "entkoppeln" die Normalkoordinaten?

d) Bestimmen Sie mithilfe von **c)** die Lösung $\xi(t)$ zum Anfangswert $x^1(0) = x^2(0) = \dot{x}^2(0) = 0, \dot{x}^1(0) = v_0$. Diskutieren Sie die Lösung.

e) Geben Sie einen Anfangswert $U_{\underline{w}}(\gamma(0))$ an, der zu einer monofrequenten Schwingung führt.

2. Klausur

1) Sei V ein reeller zweidimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und ON-Basis $\underline{e}$. Die Abbildung $\pi : V \times V \to Z$ sei ein Tensorprodukt. Es wird notiert $\pi(v, w) = v \otimes w$. Die lineare Abbildung $A : V \to V$ habe die Matrix

$$M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

a) Welche Koordinaten $A^{i,j}_{1,2}$ hat $(A \otimes A)(e_1 \otimes e_2)$ bezüglich der Basis $(e_i \otimes e_j)_{i,j\in\{1,2\}}$?

b) Welche Norm hat $(A \otimes A)(e_1 \otimes e_2)$?

2) Eine Kugel rollt über einen Berg. Ihr horizontaler Abstand vom Gipfel zur Zeit t werde mit $x(t)$ bezeichnet (siehe Bild). Unter bestimmten Umständen erfüllt die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (näherungsweise für genügend kleine Werte $x(t)$) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = x(t). \tag{A.2}$$

a) Von welchem Vektorfeld A auf $V = \mathbb{R}^2$ (mit Standardbasis $\underline{e}$) ist die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to V, t \mapsto x(t)e_1 + \dot{x}(t)e_2,$$

die aus einer Lösung x von $(A.2)$ gebildet wird, eine Integralkurve?

b) Tragen Sie in eine Skizze des Vektorfeldes die Werte $A(\pm e_1), A(\pm e_2), A(e_1 \pm e_2), A(-e_1 \pm e_2)$ ein.

c) Welches Eigenwertspektrum und welche Eigenräume hat die lineare Abbildung von V nach V, deren Matrix bezüglich $\underline{e}$ die folgende ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

d) Welche Integralkurve von A geht zur Zeit 0 durch $x(0)e_1 + \dot{x}(0)e_2$? Wie lautet die zugehörige Lösung von Gleichung $(A.2)$?

e) Können $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ so gewählt werden, daß die Kugel zunächst rollt und dann zu einer Zeit t_1 am Gipfel zum Stillstand kommt?

f) Wie müssen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ gewählt werden, damit die Kugel für alle $t > 0$ einen Abstand vom Gipfel hat, der den Wert 1 unterschreitet?